1. MEHANIKA TOČKASTEGA TELESA

Kaj je točkasto telo: to je telo, ki je mnogo manjše od razdalj v sistemu.

Primer: Zemlja

Ko študiramo naše območje, je Zemlja točkasto telo.
Ko študiramo naprimer gibanje satelitov okoli Zemlje, očitno ne moremo jemati Zemlje kot točkasto telo.

Mehanika je del fizike, ki opisuje načine, na katere se telo giblje v prostoru in ahamava vzroke za njihovo gibanje.

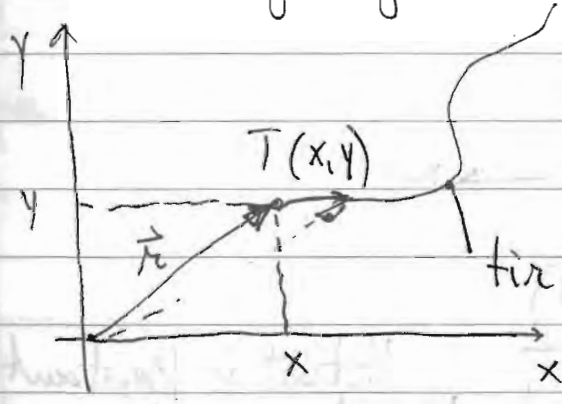
11. Kinematika točkastega telesa

Kaj potrebujemo za opis gibanja točkastega telesa:

i) koordinatni sistem, x-y za gibanje v ravnini ali x, y, z za gibanje v prostoru.

ii) lega točkastega telesa (točke) ob različnem času.

Opisujemo torej kako se telo giblje, ne spraševjemo pa po vzrokih za telo gibanje.



Primer: gibanje telesa v ravnini obravnavano telo, da si izberemo koordinatni sistem in v tem sistemu označimo koordinate točke za različne čase

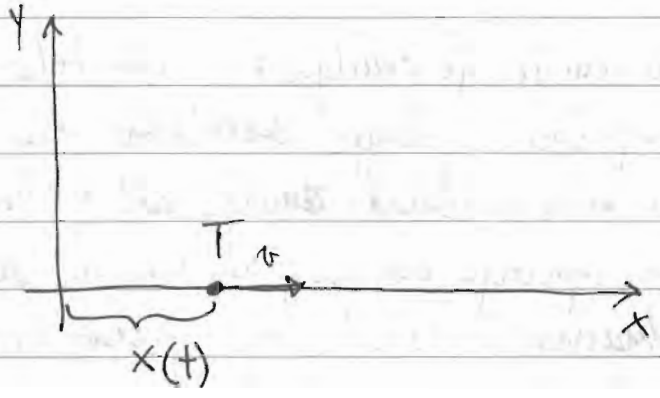
$\vec{r} = (x, y)$ krajevni vektor točke T

1.1. Premo enakomerno gibanje

Tri premem gibanju se točkasto telo giblje po črti, ki je premica. Ker je gibanje enakomerno, se giblje s konstantno hitrostjo v

Tir: premica

$\vec{v}$ = konst.



Koordinatni sistem obrnemo tako, da je x-os v smeri gibanja točke.

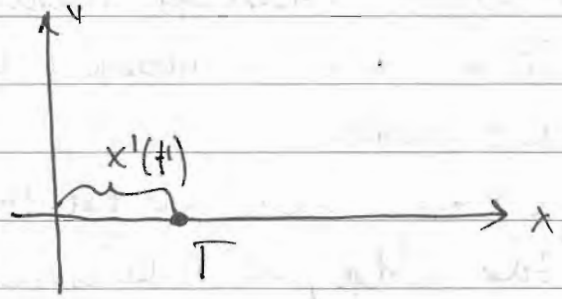
Velja: $x(t) = x' + v \cdot (t - t')$

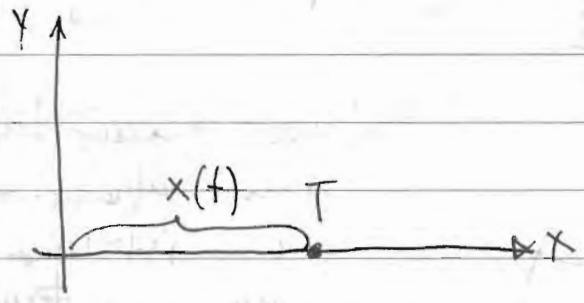
x' ... začetna lega ob času t'

t' ... začetni čas.

v ... hitrost telesa

Ob času t':





Velja: $x - x' = v(t - t')$

$$v = \frac{x - x'}{t - t'}$$

Hitrost je konstantna, če telo v enakih časih opravi enake poti.

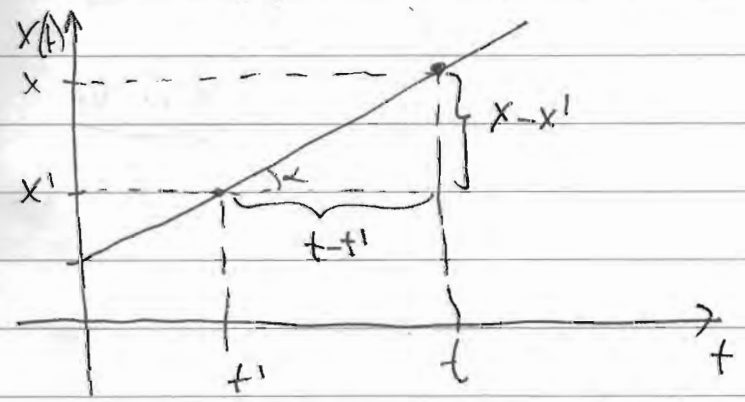
$x - x'$ .... razlika poti → je lahko pozitivna ali negativna!
$t - t'$ .... razlika časa → to je vedno pozitivno, ker čas teče

Smer hitrosti $v > 0 \Rightarrow x > x'$ in telo se giblje v smeri naraščajoče koordinate x (na desno)
$v < 0 \Rightarrow x < x'$ in telo se giblje v smeri manjšajočega x-a (na levo).

Togasto vzamemo $\Delta x = x - x'$ in $\Delta t = t - t'$, tako da hitrost zapišemo kot

$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$, če je Δt zelo majhen → $v = \frac{dx}{dt}$

Narišem $x(t)$ v (x, t) sistemu:

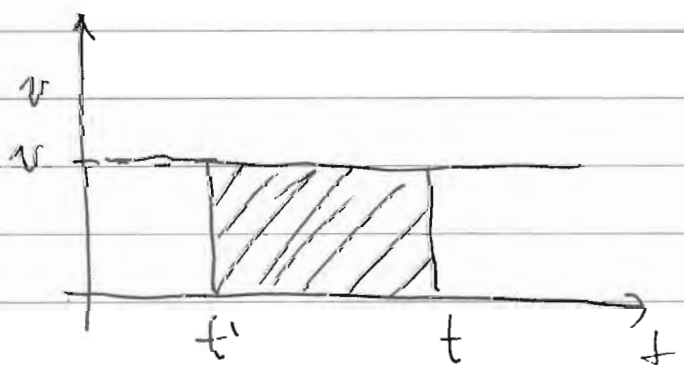


$$v = \frac{x - x'}{t - t'} = tg\,\alpha$$

↓

hitrost pomeni naklon premice $x(t)$

Kaj pa hitrost? Ta je konstantna:



produkt $v \cdot (t - t') = x - x'$, to pa je tudi ploščina pod to krivuljo.

Kakšne so enote? x .... merimo v [m]

t .... merimo v [s]

v .... merimo v [m/s] ali [$m\,s^{-1}$]

Primer: Avto se giblje s hitrostjo 150 km/h. Kakšno pot opravi v 10 s?

$$v = \frac{x - x_1}{t - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = 150\ km/h = \frac{150 \cdot km}{h} =$$

$$= \frac{150 \cdot 1000\ m}{3600\ s} = \frac{150}{3{,}6}\ m\,s^{-1} =$$

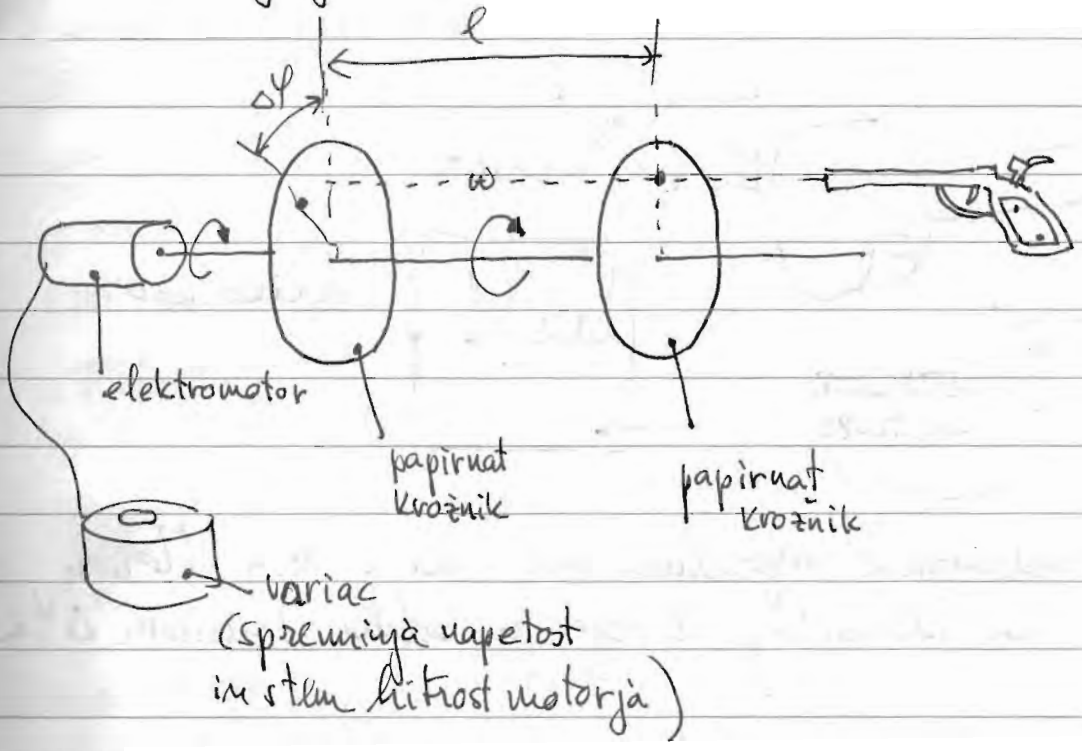
$$= \underline{\underline{41{,}6\ m\,s^{-1}}}$$

Kakšno pot opravi v 10 s

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v \cdot \Delta t = \Delta x \Rightarrow \Delta x = v \cdot \Delta t = 41{,}6 \frac{m}{s} \cdot 10\ s =$$

$$= \underline{\underline{416\ m}}$$

Primer merjenja hitrosti izstrelka:



hitrost izstrelka se ci sicer spreminja s časom zaradi zračnega upora, vendar na tako kratki razdalji lahko vzamemo da je kar konstantna, da se ne spreminja.

$$v_{KROGLE} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{l}{\Delta t}$$

l .... razdalja med ploščama

Δt .... časovni presledek, ko izstrelek prekukujanaj prej prvo, nato pa drugo ploščo.

Mi lahko izmerimo kot $\Delta\varphi$.
Kako iz tega izračunati Δt?

Velja

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi\nu \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{t_0} \cdot \Delta t$$

to izmerimo

ω .... kotna hitrost

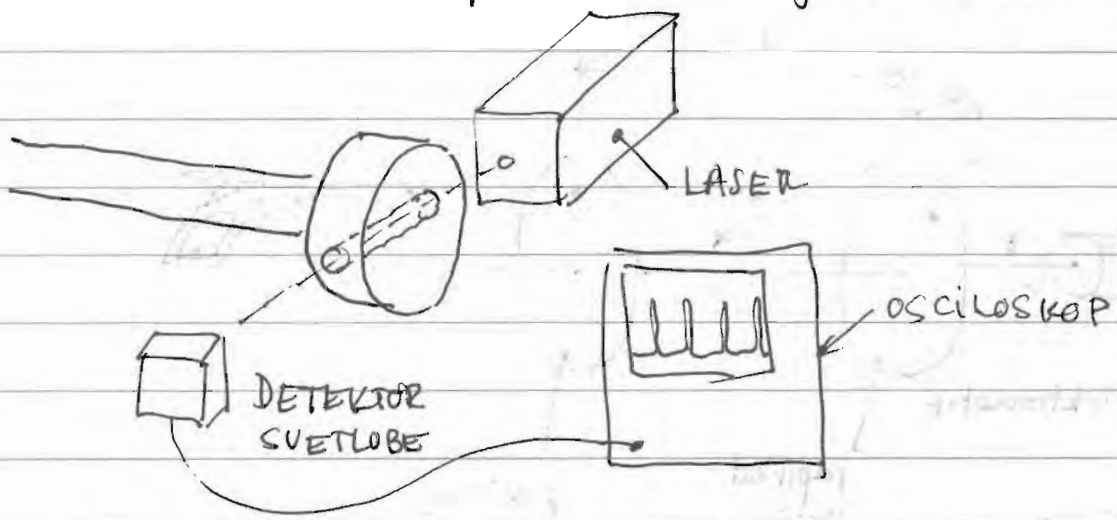
ν .... frekvenca vrtenja plošče

t_0 ... obhodni čas plošče

to lahko zmerimo

$$\Delta\varphi \cdot t_0 = 2\pi \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta\varphi \cdot t_0}{2\pi}}$$

Kako izmerimo obhodni čas plošče? Na osi je še dodatni merilec



izmerim čas med dvema zaporedima sunkoma v ms. Moram pomnožiti z 2, da dobim t_0, iz tega pa lahko izračunam $\Delta\varphi$ in v

$$\Delta\varphi \sim 15^\circ = \frac{2\pi}{360}\cdot 15\ \text{rad} = 0{,}52\ \text{rad}.$$

$$\Delta t = \frac{0{,}52\cdot 30\ \text{ms}}{2\pi} = 2{,}48\ \text{ms} = 2{,}48\cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

$$v = \frac{0{,}5\ \text{m}}{2{,}48\cdot 10^{-3}\ \text{s}} = \frac{0{,}5\cdot 10^{3}}{2{,}48}\ \text{m s}^{-1} = \underline{\underline{200\ \text{m s}^{-1}}}$$

Primer enakomernega premega gibanja: zračna klop in vozički na zračni blazini, ki drsi po zračni klopi:

a) pahači gibanja kaplje črnila za primer enakomernega gibanja
b) pahači razmike med kapljami črnila za enakomerno pospešeno gibanje.

1.1.2. Premo enakomerno pospešeno gibanje

Dogovorimo se, da začnemo čas šteti od $t' = 0$. Pri premem enakomerno pospešenem gibanju se telo giblje po premici, njegova hitrost pa narašča sorazmerno s časom

$$v = v' + a \cdot t$$

$$a = \text{konst.}$$

v .... hitrost ob času t
v' .... začetna hitrost ob času $t' = 0$
a .... pospešek telesa

se ne spreminja s časom!

$$a = \frac{v - v'}{t} = \text{konst} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

enota $\left[\frac{m}{s \cdot s}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right] = [m s^{-2}]$

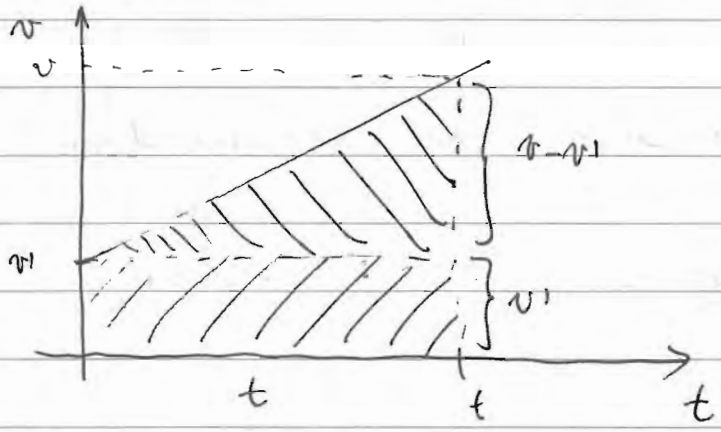
Primer: izračunaj: kolikem je pospešek avtomobila, ki pospeši od 0 do 100 km/h v 5 sekundah ali je gibanje enakomerno pospešeno?

$v' = 0$

$v = 100 \text{ km/h} = \frac{100 \cdot 1000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = \frac{100}{3,6} \text{ m s}^{-1} = 27,7 \text{ m s}^{-1}$

$a = \frac{27,7 \text{ m s}^{-1}}{5 \text{ s}} = 5,5 \text{ m s}^{-2}$

Kakšna je pot pri enakomerno pospešenem gibanju:



Spomnite se: pot pravi ploščina lika pod krivuljo $v(t)$:

$$X(t) = v' \cdot t + \frac{1}{2}(v - v') \cdot t$$

Pot lahko izrazim tudi s pospeškom, saj je $v = v' + a \cdot t \Rightarrow$

$$v - v' = a \cdot t$$

Izraz $v - v'$ rotemo in dobim

$$X(t) = v' \cdot t + \frac{1}{2}(a \cdot t) \cdot t = v' \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$\boxed{X(t) = \Delta = v' \cdot t + \frac{1}{2} a t^2}$$

pot narašča kvadratno s časom! Zakaj? Ker se hitrost nenehno veča!

Ali lahko pišemo zvezo med v in a in x? $t = \frac{v - v'}{a}$

$$X(t) = v' \cdot t + \frac{1}{2}(v - v')t = v' \frac{(v - v')}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v - v')(v - v')}{a} =$$

$$x(t) = \frac{1}{a}\left(v \cdot v' - v'^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v'^2 - v \cdot v'\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v'^2\right) = \frac{1}{2a}\left(v^2 - v'^2\right)$$

$$v^2 - v'^2 = 2a \cdot x$$

$$\boxed{v^2 = v'^2 + 2ax}$$

Če povzamemo:

$$\boxed{\begin{aligned} v^2 &= v'^2 + 2ax \\ x &= v' \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \\ v &= v' + a \cdot t \end{aligned}}$$

Te tri formule si je treba zapomniti.

Primer: Avtomobil ima na začetku hitrost $5\,m\,s^{-1}$ in na razdalji $100\,m$ enakomerno pospeševanja s pospeškom. Kolikšen je pospešek avtomobila, če je hitrost po $100\,m$ $20\,m\,s^{-1}$?

$v^2 = v'^2 + 2ax$

$v^2 - v'^2 = 2a \cdot x$

$2ax = v^2 - v'^2$

$$\boxed{a = \frac{v^2 - v'^2}{2x}}$$

$v = 20\,m\,s^{-1}$

$v' = 5\,m\,s^{-1}$

$x = 100\,m$

$a = ?$

$$a = \frac{20^2\,m^2\,s^{-2} - 5^2\,m^2\,s^{-2}}{2 \cdot 100\,m} = \frac{400 - 25}{200}\,\frac{m^2\,s^{-2}}{m} = 1{,}8\,m\,s^{-2}$$

Poseben primer enakomerno pospešenega gibanja: prosti pad
Omeni: Galileo Galilei je bil prvi, ki je študiral prosti pad.
To je enakomerno pospešeno gibanje zaradi Zemljinega privlaka.
Pospešek teles z zemeljskim gravitacijskim poljem:

$a = g$, g .... težni pospešek $g = 9{,}8\ m\,s^{-2}$
(se spreminja z zemljepisno širino in pa nadmorsko višino!)

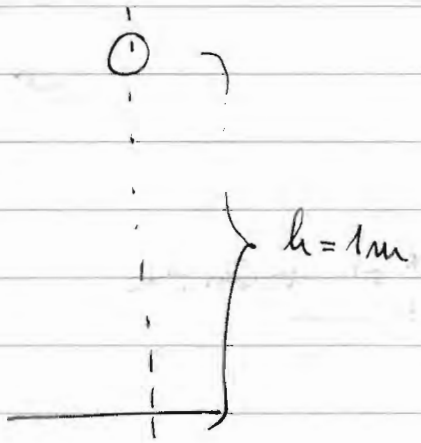
* Enačbe gibanja so povsem enake, kot smo jih zapisali, s tem da se pospešek a nadomesti z g.
Pomembno: vsa telesa padajo z enakim težnostnim pospeškom. Navade je pričakovati, da težja telesa (z večjo maso) padajo hitreje:

Padec z evakuirano cevjo:

Padec s kroglicami, privezanimi na nitko: enakomeren zvok in
neenakomeren zvok

Primer: Kroglico spustimo, da prosto pada. Kolikšno hitrost doseže potem ko preteče višino 1 m. V kolikšnem času prepotuje to pot?

$h = 1\,m$, začetna hitrost $v' = 0$



$$v^2 = v'^2 + 2g \cdot h$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,m\,s^{-2} \cdot 1\,m} =$$

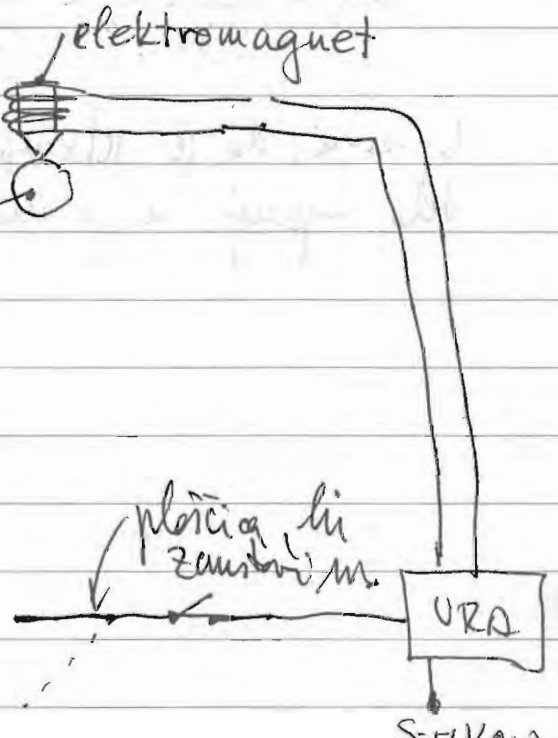
$$= \sqrt{19{,}6}\ m\,s^{-1} = \underline{4{,}4\,m\,s^{-1}}$$

$$x = v' \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad v' = 0,\ a = g$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \frac{2h}{g} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,m}{9{,}8\,m}\,s^2} = \sqrt{0{,}20\,s} = \underline{0{,}45\,s}$$

Poglejmo, če je to res, izračunajmo g

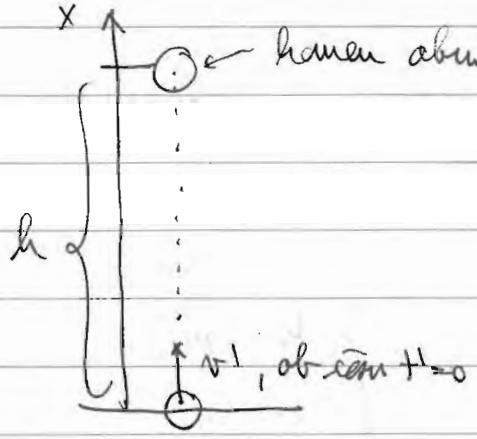


Padec s kroglico, ki prosto pada:

Padec št.	t [s]	$g\,[m\,s^{-2}]$	$\bar{g}$ kroglica
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Izračunamo povprečno vrednost g-ja

Primer 2: Kamen vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo $v' = 10\ m\,s^{-1}$. Do katere višine se povspne



Gre za pospešeno gibanje. Pojemek je enak $-g$. Hitrost se torej spreminja kot:

$$v = v' - g \cdot t$$ ali povezava brez časa

$$v^2 = v'^2 - 2g \cdot h$$

$$0 = v'^2 - 2gh$$

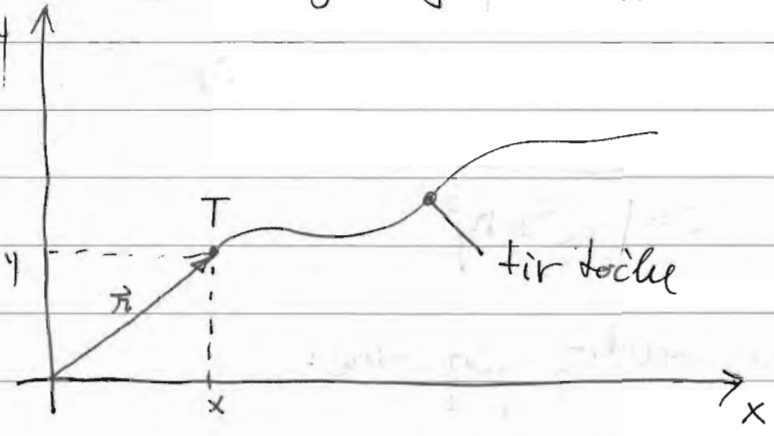
$$\boxed{h = \frac{v'^2}{2g}}$$ do te višine se kamen povspne

$$h = \frac{10^2\,m^2\,s^{-2}}{2 \cdot 9{,}8\,m\,s^{-2}} = \frac{100}{19{,}6}\,m = \underline{\underline{5{,}1\,m}}$$

Opozori, da je gibanje navzgor enakomerno pojemajoče, ko se telo vzpenja in je enakomerno pospešeno, ko telo pada.

1.1.3. Gibanje v ravnini, poševni met

Tojemo sestavljenega gibanja v (x,y) ravnini



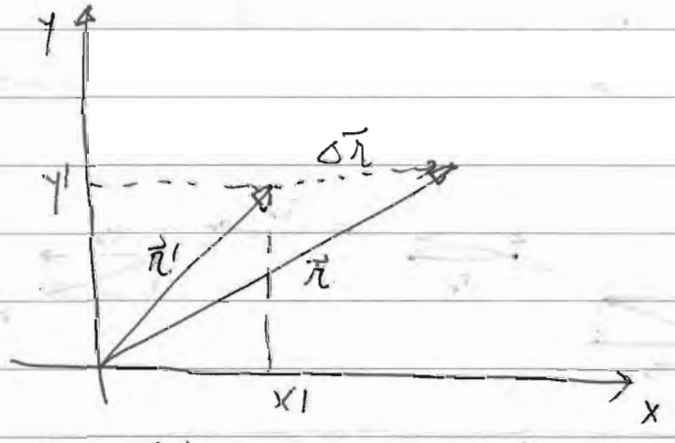
Gibanje si mislimo sestavljeno iz dveh neodvisnih gibanj, eno v smeri osi x, drugo pa v smeri osi y!

$\vec{r} = (x, y)$ Krajevni vektor, ki določa lego točke od izhodišča koordinatnega sistema.

Lega točke se s časom spreminja

t' : $\vec{r}' = (x', y')$

$t'+\Delta t$: $\vec{r} = (x, y)$



Razlika obeh krajevnih vektorjev $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x', y-y')$
To razdaljo prepotuje v času Δt.

Definiramo hitrost: $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x-x'}{\Delta t}, \frac{y-y'}{\Delta t}\right)$

To je vektor hitrosti, ki ima komponenti $v_x = \frac{x-x'}{\Delta t}$

$v_y = \frac{y-y'}{\Delta t}$

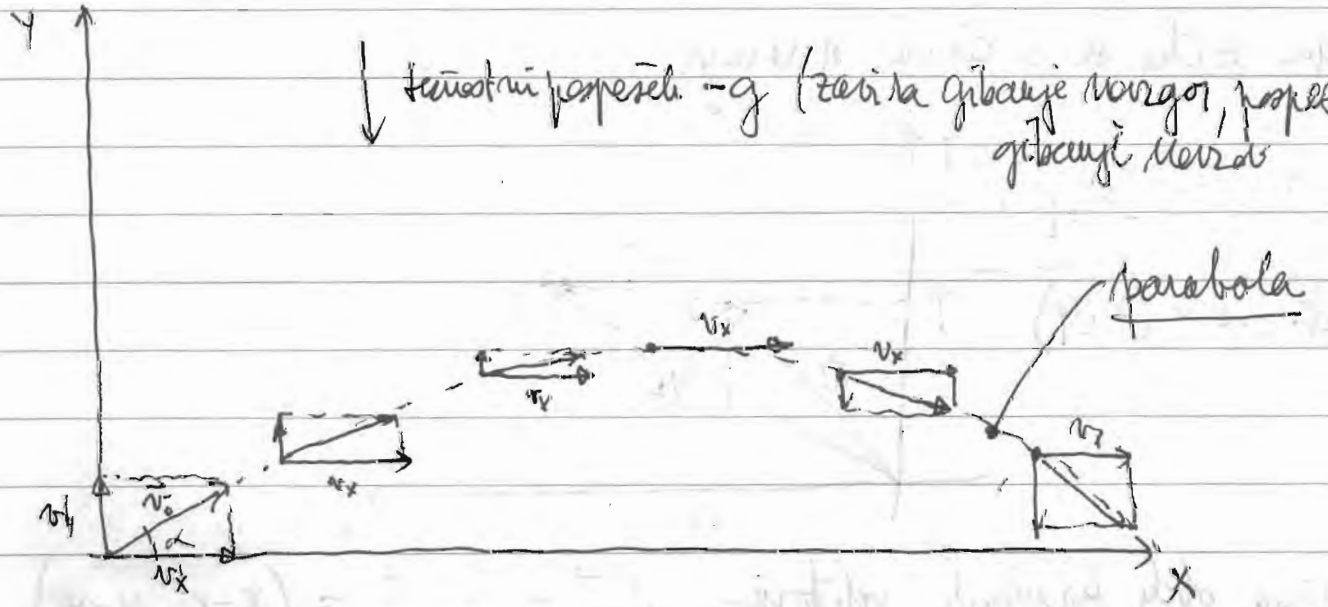
Celotna hitrost je $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Podobno definiramo vektor pospeška:

$\vec{a} = (a_x, a_y)$ $\quad a_x = \frac{v_x - v_{x'}}{\Delta t}$ $\quad \Delta t$ naj bo čimmanjši!

$a_y = \frac{v_y - v_{y'}}{\Delta t}$

Poglejmo si primer sestavljenega gibanja: poševni met



Zanima nas, po kakšnem tiru se giblje točkasto telo pri poševnem metu.

Gibanje v smeri x: to gibanje je enakomerno

$$x = x' + v_x' \cdot t = v_x' \cdot t$$

Gibanje v smeri y: to gibanje je pospešeno. Najprej enakomerno pojemajoče, nato enakomerno pospešeno:

$$y = v_y' \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_y' \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

To je enačba parabole

$$\boxed{T = (x, y) = \left(v_x' \cdot t,\ v_y' \cdot t - \frac{1}{2} g t^2\right)} \Rightarrow t = \frac{x}{v_x'} \Rightarrow \boxed{y = v_y' \cdot \frac{x}{v_x'} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_x'^2}}$$

To ni nič drugega kot enačba parabole, obrnjene na glavo

$y = ax^2 + bx + c$ to je enačba parabole

$$T = (x, y) = (x,\ ax^2 + bx + c)$$

Telo se pri poševnem metu giblje po paraboli.

Poglejmo, do katere višine se točkasto telo povzpne:
~~Zapišemo~~ ~~Zra~~ Izračunajmo najprej, koliko časa si vzpenja:

$$v_y = v_y' - g \cdot t = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$$

Ko je $v_y = 0$, takrat bo telo v najvišji točki $v_0 \cdot \cos\alpha - g \cdot t_0 = 0$

$$\boxed{t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

Kako visoko pride:

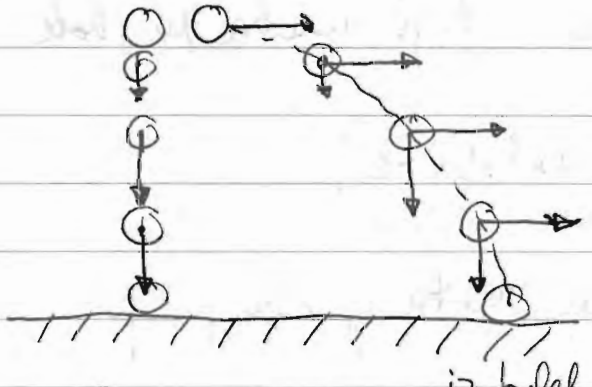
$$y = v_y' \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ob času to doseže najvišjo točko $h = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 =$

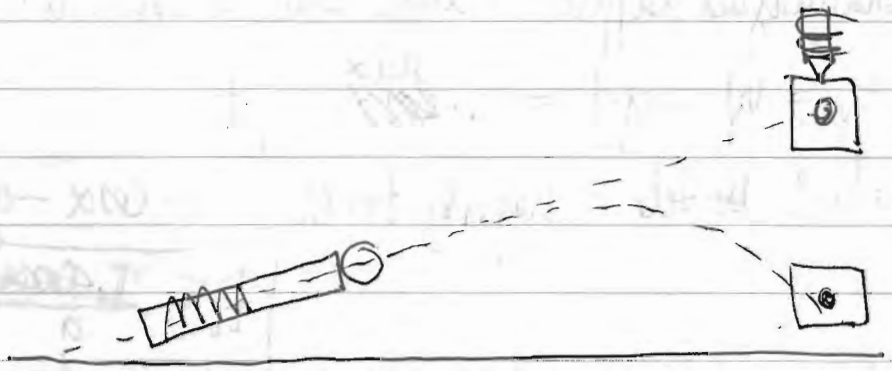
$$= v_0 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} =$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha}$$

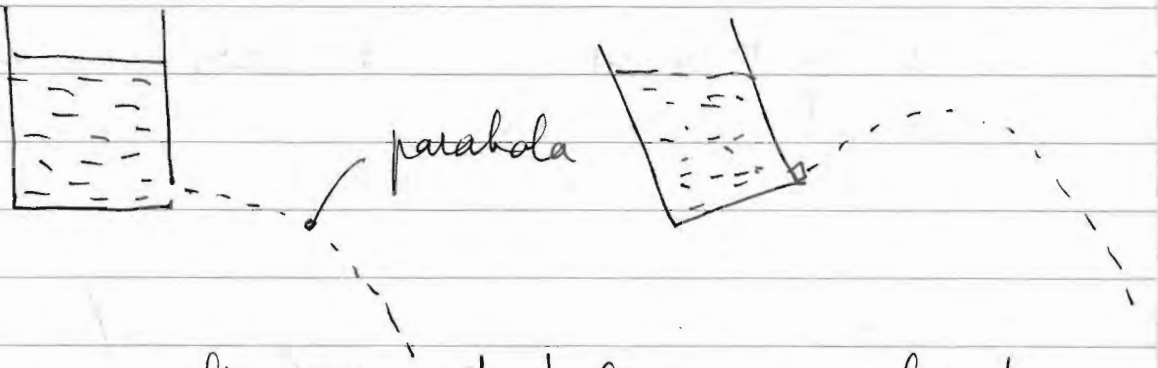
Pokaži poskus z dvema kroglicama. Ena pada navpično navzdol, druga pa poševno. Obe padata enak čas



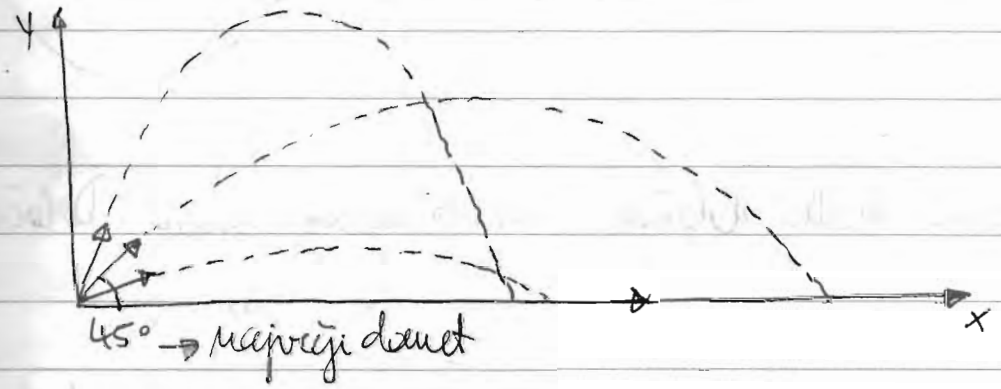
Pokaži poskus s tarčo: zakaj ~~tarča~~ izstrelek vedno zadene tarčo



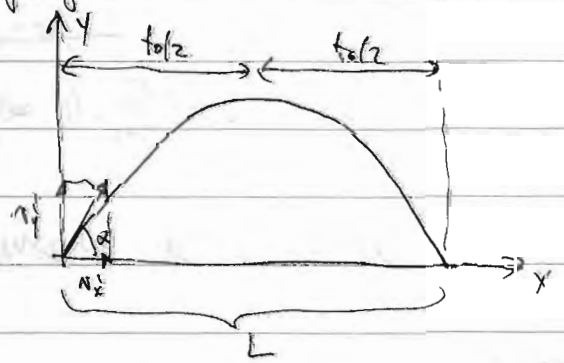
Tekoči curek vode iz posode



Trimljaj deseg z zalivanjem vrta! Cev moramo držati pod 45°, da gre curek najdlje.



Primer: Kamen vržemo z začetno hitrostjo $v_0 = 10\,m/s$ poševno navzgor pod kotom 60° glede na vodoravnico. Kako dolgo leti in kako daleč prileti. Pod katerim kotom moramo vreči kamen, da leti najdlje?



$v_0 = 10\,m/s$

$\alpha = 60°$

$t_0 = ?$

$L = ?$

$L(\alpha) = max?$

$v_y(t) = v_y' - g \cdot t$

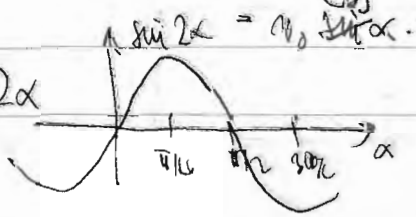
$0 = v_y' - g \cdot t_0/2 = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t_0/2$

$t_0 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 10\,m/s \cdot \sin 60°}{9{,}8\,m/s^2} = 1{,}8\,s$

$x(t) = v_x' \cdot t \;;\; L = x(t_0) = v_x' \cdot t_0 =$

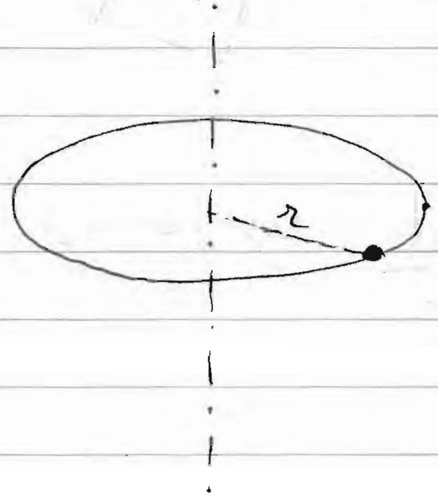
$= v_0 \cos\alpha \cdot t_0 = 10\,m/s \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}8\,s = 9{,}4\,m$

$L(\alpha) = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot 2 v_0 \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$

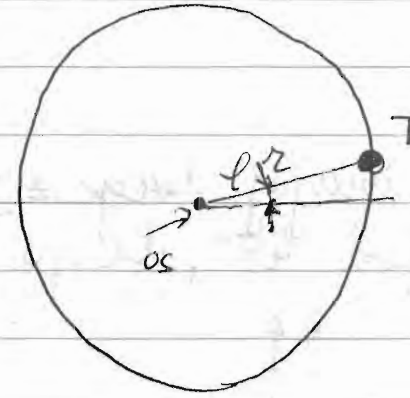


1.1.4. Enakomerno kroženje

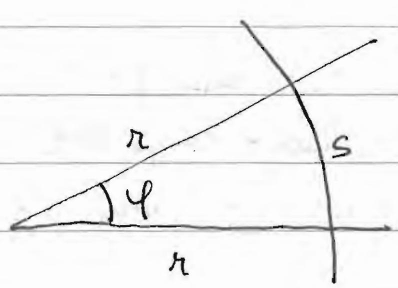
Pri kroženju točkastega telesa je tir krog. Pri enakomernem kroženju je hitrost kroženja stalna.



če pogledamo vzdolž osi, vidimo



Najprej poglejmo, kako določimo lego točke na krožnici. Določimo jo s kotom φ.



lok kot

Velja: $\boxed{s = r \cdot \varphi}$ φ ... kot v radianih

Polni kot

$s = 2\pi r = r \cdot \varphi \Rightarrow \varphi = 2\pi$ je polni kot

Če je $x = 10^\circ$ 2π 360
x 10

$x = \frac{2\pi}{360} \cdot 10 = 0{,}17$ rad

Pri enakomernem kroženju se kot zasuka veča sorazmerno s časom

$$\boxed{\varphi = \varphi' + \omega \cdot t}$$

φ' ... začetni kot
ω .... kotna hitrost

Iz tega dobimo $\omega = \frac{\varphi - \varphi'}{t}$ = konstanta

Kakšna je pot pri enakomernem kroženju:

$$lok = s = \varphi \cdot r = \varphi' \cdot r + \omega \cdot r \cdot t = s' + \omega \cdot r \cdot t$$

Krožilna (tangencialna) hitrost

$$\boxed{v_T = \omega \cdot r}$$ Krožilna hitrost $[m\,s^{-1}]$

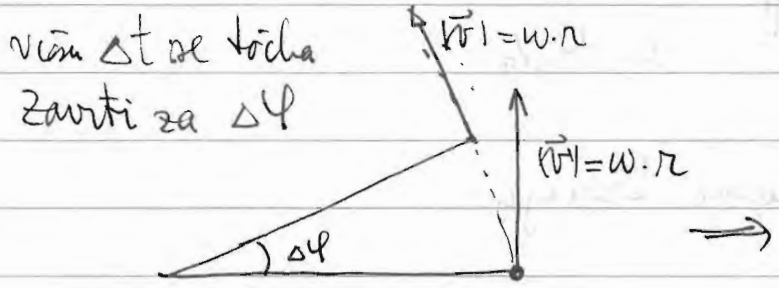
Kako je določen obhodni čas: $s = 2\pi \cdot r = \omega \cdot r \cdot t_0$

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu}$$

t_0 .... obhodni čas

ν .... frekvenca kroženja

Ali je enakomerno kroženje enakomerno ali pospešeno gibanje? Je pospešeno gibanje, ker se smer krožilne hitrosti spreminja s časom!! Poglejmo, kakšen je pospešek pri enakomernem kroženju.



$$\frac{|\Delta v|}{2} = v \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx v \cdot \frac{\Delta\varphi}{2}$$

če so koti majhni, velja $\sin\alpha \approx \alpha$!!

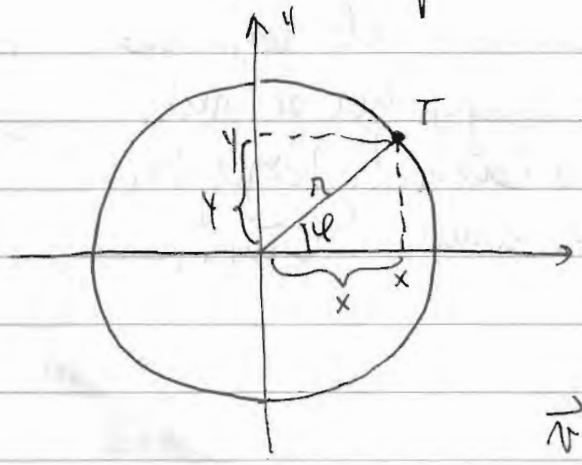
$$\Delta v = v \cdot \Delta\varphi = v \cdot \omega \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \cdot \omega = \omega r \cdot \omega = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

$$\boxed{a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$

To je radialni pospešek. Zaradi tega pospeška telo kroži. Če tega pospeška ne bi bilo, bi se telo gibalo po ravni črti (premici)

Kako se lahko opišemo kroženje?



$$x = r \cdot \cos\omega t$$

$$y = r \cdot \sin\omega t$$

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cdot \cos\omega t, r \cdot \sin\omega t)$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(r \cdot \omega(-\sin\omega t), r \cdot \omega \cos\omega t\right)$$

$$= r \cdot \omega\left(-\sin\omega t, \cos\omega t\right)$$

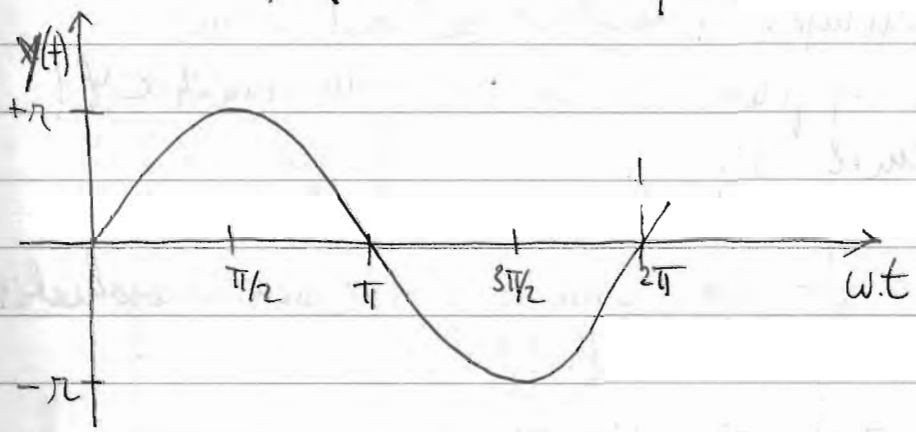
Velikost hitrosti $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = r\cdot\omega$

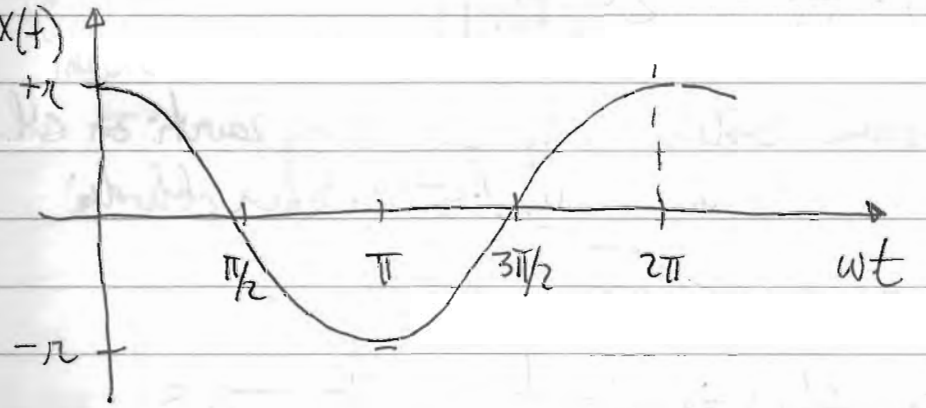
Kako dobimo pospešek?

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-r\cdot\omega^2\cos\omega t,\ -r\cdot\omega^2\sin\omega t\right)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2\omega^4(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = r\cdot\omega^2$$ dobimo isto, kot smo prej izračunali

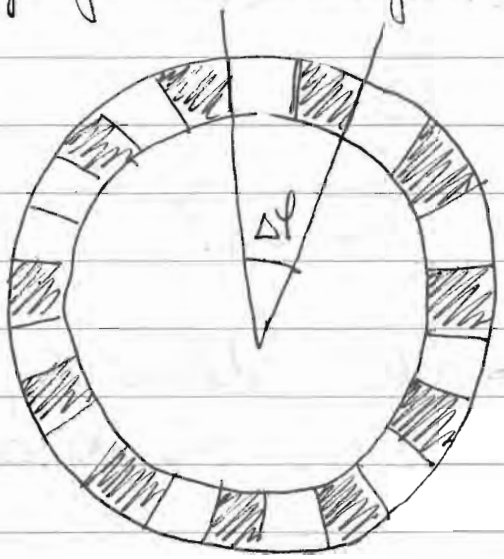
Narišemo še projekciji $x(t)$ in $y(t)$





Pokaži projekcijo točke pri vrtenju plošče
Razloži merjenje ~~st~~ frekvence vrtenja s stroboskopom.

Merjenje frekvence kroženja s stroboskopom:



N črnih in N belih prog

Kdaj krog navidez miruje? Takrat ko se med dvemi zaporednimi bliski krog premakne za mnogokratnik $\Delta\varphi$! Naj bo to pri frekvenci ν_1

ustrezni čas je $\Delta t_1 = \frac{1}{\nu_1}$ → plošča se zavrti nek mnogokratnik $\Delta\varphi \cdot M$

drugi ustrezni čas je $\Delta t_2 = \frac{1}{\nu_2}$ → $\Delta\varphi(M+1)$

To pomeni, da se v časovni razliki $\Delta t_2 - \Delta t_1$ krog zavrti za $\Delta\varphi$. Če ta čas pomnožim z N, dobim polni kot, oziroma obhodni čas t_0

$$t_0 = N(\Delta t_2 - \Delta t_1) \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{N(\Delta t_2 - \Delta t_1)} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1}} = \frac{\nu_1 \cdot \nu_2}{N(\nu_1 - \nu_2)}$$

$$\boxed{\nu_0 = \frac{\nu_1 \cdot \nu_2}{N(\nu_1 - \nu_2)}}$$

iz tega izračunamo frekvenco vrtenja

1.1.5. Enakomerno pospešeno krožnje

Pri enakomerno pospešenem krožnjuse kotna hitrost povečuje sorazmerno s časom.

$\omega = \omega' + \alpha \cdot t$ ω'... začetna kotna hitrost

α .... kotni pospešek (povedalo se kotna hitrost povečuje s časa)

$$\alpha = \frac{\omega - \omega'}{t}$$

enota $[rad\,s^{-2}]$!

Kaj je s krožno hitrostjo?

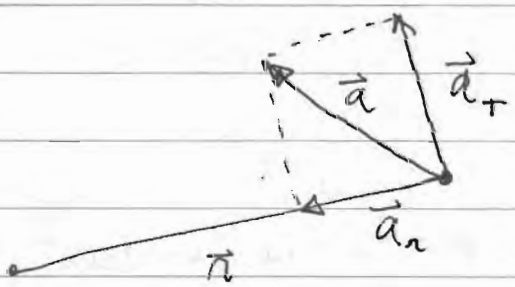
$v = \omega \cdot r = \omega' \cdot r + (\alpha \cdot r)t$

$= a_T$

tangencialni pospešek → opisuje večanje krožne hitrosti!

$$a_T = \alpha \cdot r$$

Pri enakomerno pospešenem krožnju togega telesa imamo torej dva pospeška: radialni in tangentni.



$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_T$

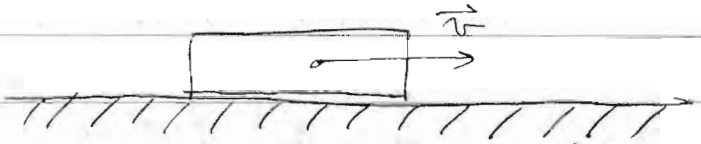
Celotna velikost

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}_r^2 + \vec{a}_T^2}$$

$$a = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\alpha \cdot r)^2} = r \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

1.2. Sile in Newtonovi zakoni

Zamislimo si poskus:



Telo poravnamo v smeri podlage.
Čez čas se ustavi. Zakaj? Kaj bi se zgodilo, če bi trenje zmanjšal?
Telo bi se gibalo daljčasa. Kaj bi se zgodilo, če ne bi bilo trenja?
Telo bi se gibalo še dalj časa. Koliko dalj? V neskončnost.
Kaj sledi iz tega "miselnega poskusa"? Sledi 1. Newtonov zakon, ki ga je že poznal Galileo Galilei.
Isaac Newton (1642–1727). Ustanovitelj sodobne fizike.

1. Newtonov zakon: telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če nanj ne deluje nobena sila (ali je vsota več zunanjih sil enaka 0).
Kaj je to sila? S silo označimo vpliv drugih teles na dano telo (npr. človek deluje s silo na telo), tako da povzročajo njihovo gibanje ali pa deformacije.

2. Newtonov zakon: pospešek telesa $\vec{a}$ je sorazmeren z zunanjo silo $\vec{F}$ in ima smer sile oziroma rezultante vseh zunanjih sil

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{ali} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\vec{a}$ .... vektor pospeška | m .... masa
$\vec{F}$ .... vektor sile

Definicija mase preko atomske mase ^{12}C : $m_0 = 1.66 \cdot 10^{-27} kg \cdot 12$

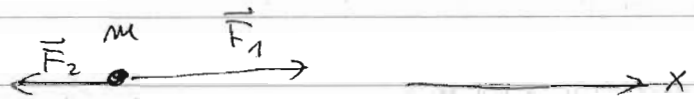
Poglejmo enote: masa m .... $[kg]$

pospešek $\vec{a}$ .... $[m/s^2]$

sila $\vec{F} = m \cdot a = [kg\, m/s^2] = [N]$

Enota za silo je N (kot Newton)

Kaj pa če imamo več zunanjih sil



$\vec{F}_1 = (F_1, 0)$

$\vec{F}_2 = (-F_2, 0)$

Izračunam rezultato sil $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_1, 0) + (-F_2, 0) =$

$= (F_1 - F_2, 0)$

Katero smer ima pospešek $\vec{a}$? Ima smer x

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ Ker ima $\vec{F}$ smer samo x, jo ima tudi $\vec{a}$!

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, kakšno računamo za rezultat smer posebej

$\vec{a} = (a_x, a_y)$ $\quad a_x = \frac{F_1 - F_2}{m}$

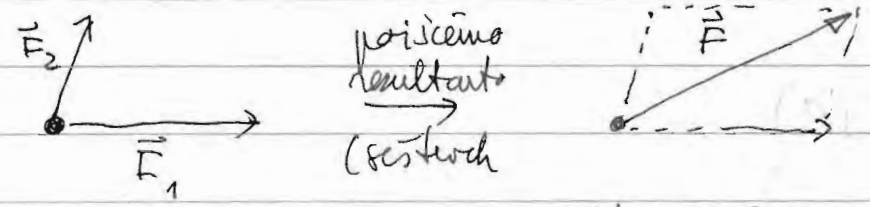
$a_y = 0$

$\vec{a} = \left(\frac{F_1 - F_2}{m}, 0\right)$

Vzemimo $F_1 = 10N$, $F_2 = 1N$, $m = 1kg$

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{9\,N}{1\,kg} = 9\,ms^{-2}$$

Kaj se zgodi, če je vsota vseh zunanjih sil enaka 0?
Sile lahko delujejo v različni:



Kako v tem primeru računamo rezultanto? Tako, kot računa z vektorji:

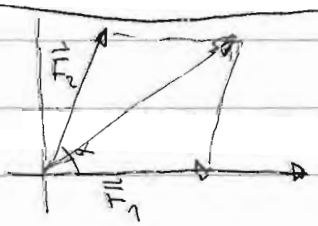
$$\vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y}) \qquad \vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y})$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x}, F_{1y} + F_{2y})$$

Poglejmo si primer enakomerno pospešenega gibanja:

3. Newtonov zakon: če deluje prvo telo na drugo telo s silo, deluje drugo telo na prvo z nasprotno enako silo
Primer: 2 moža na nasprotnih

Primer.



$|\vec{F}_1| = 10N$

$|\vec{F}_2| = 1N$

$\alpha = 60°$

$\vec{F}_1 = (10N, 0)$

$\vec{F}_2 = (1N \cdot \cos 60°, 1N \cdot \sin 60°) = (0{,}5N, 0{,}86N)$

$a = \frac{F}{m} = \frac{10{,}5N}{1kg} = 10{,}5\,ms^{-2}$

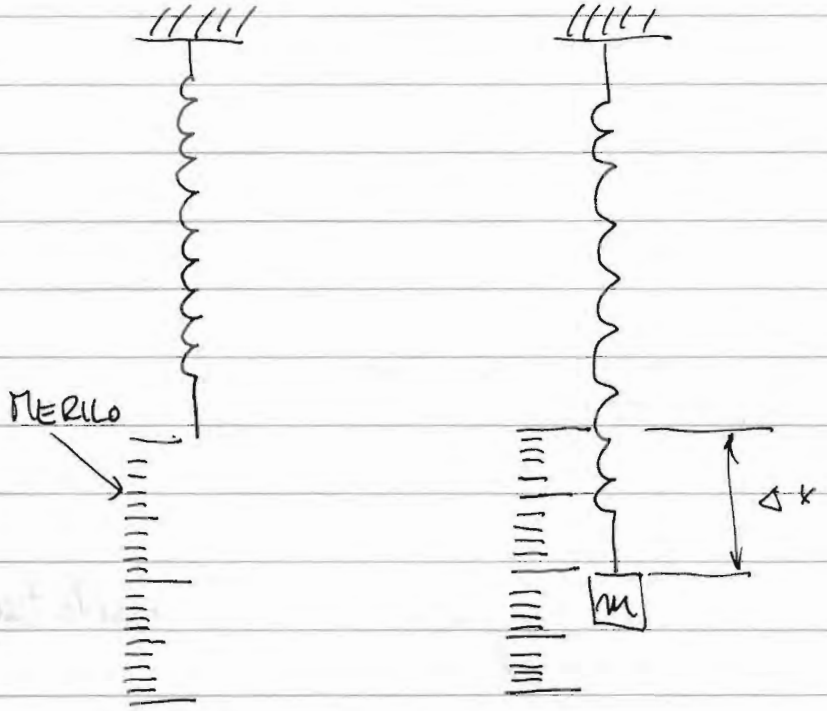
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (10N + 0{,}5N, 0 + 0{,}86N) = (10{,}5N, 0{,}86N)$

Smer: $\operatorname{tg}\beta = \frac{F_y}{F_x} =$

1.2.1. Meritev sil

Togljino si najprej načine, kako merimo sile

Vzmetna tehtnica (vijačna vzmet)



NEOBREMENJENA TEHTNICA

KO TEHTNICO OBREMENIM, SE VZMET RAZTEGNE ZA Δx

Velja enačba $F = k \cdot \Delta x$ (čim večja je sila, tem večji je raztezek vzmeti)

V našem primeru je sila, ki raztegnje vzmet kar sila teže $F = F_g = m \cdot g$

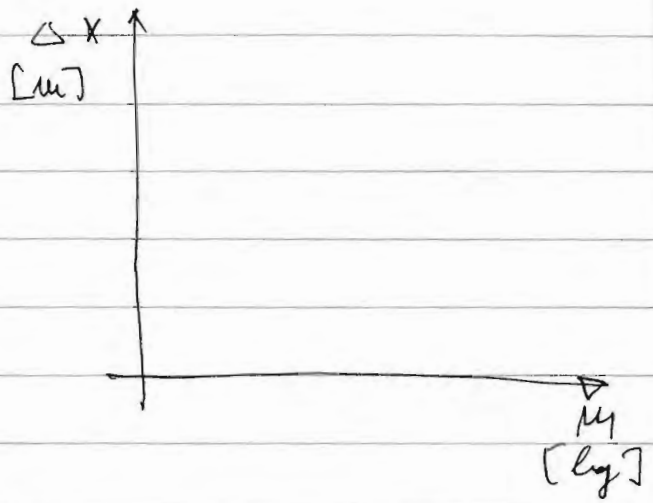
$$m \cdot g = k \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{g}{k} \cdot m}$$

Na točkasto telo z maso 1 kg delujeta dve sili. Prva sila z velikostjo 1N ima smer osi x, druga sila z velikostjo 10N pa je pod kotom 30° glede na to os. Izračunaj s kakšnim pospeškom se telo giblje in v kateri smeri.

Naredimo tabelo:

m [kg]	Δx [m]

Narišemo to tabelo



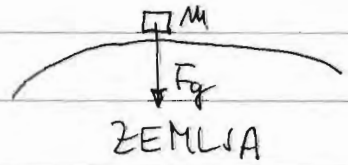
Strmina premice je $\frac{\Delta x}{m} = \frac{g}{k}$. To ocenim iz grafa in izračunam k.

1.2.2. Primeri sil iz narave: sila teže, sila lepenja in sila trenja

a) sila teže = gravitacijska sila

Gravitac. sila teže je sila, s katero se posamezna telesa privlačijo zaradi mase teles. Sila teže je gravitacijska sila, s katero Zemlja privlači telesa.

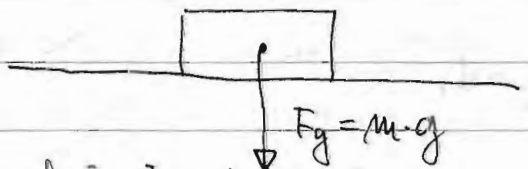
Smer sile teže je proti središču Zemlje in je enaka



$F_g = m \cdot g$

m ... masa telesa

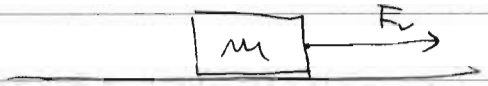
g ... gravitač. pospešek 9,8 m/s² na površini Zemlje



smer je navpična glede na vodoravno podlago.

Povej: plinna žin ozeka

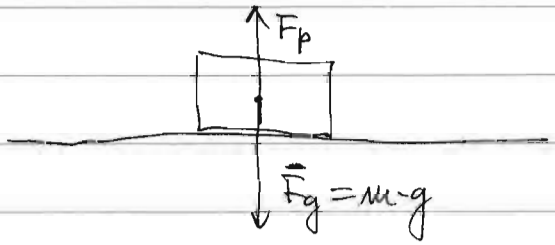
b) sila lepenja:



Telo z maso m postavim na ravno podlago in malo vrvico povlečem z majhno silo F_v. Telo se ne premakne. Silo vrvice moramo povečati, da se telo začne premikati. Kaj je torej vzrok temu, da se telo ne premika, kljub temu da delujem manj z enako silo vrvice F_v?

Poglejmo sile po komponentah:

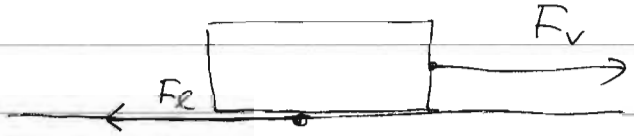
V smeri navpično na podlago:



Poglej da se telo ne giblje v tej smeri: vsota vseh sil je 0:

$F_p - m \cdot g = 0$ iz tega izračunam velikost F_p.

V smeri vodoravno:

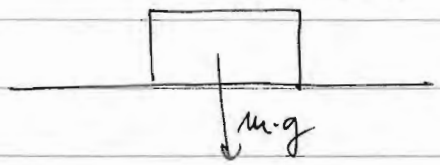


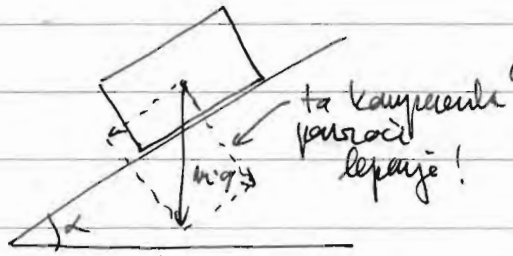
Očitno mora delovati še ena sila nasprotna F_v, da se telo ne giblje v vodoravni smeri! To je sila lepenja

Če je sila F_v manjša od neke največje sile lepenja, se telo ne bo opažalo! Izkaže se, da je F_t sorazmerna s komponento sile, pravokotno na podlago!

$$F_t = m \cdot g \cdot k_t$$

če je podlaga vodoravna





če smo na klancu z naklonom α

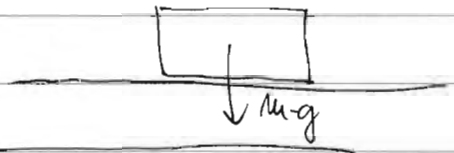
$$F_t = m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot k_t = k_t \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

k_t ... koeficient lepenja:

les-les	$k_t = 0.4$
led-led	$k_t = 0.1$
guma-beton (suh)	$k_t = 1.0$
guma-beton (moker)	$k_t = 0.7$

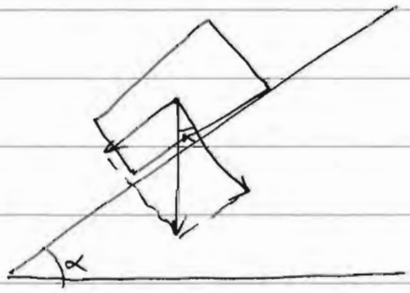
c) sila trenja:

Ko se telo giblje po podlagi, opazimo, da potrebujemo neko silo, da se telo giblje enakomerno. Torej mora podlaga (po Newtonovem I. zakonu) poredovati telo, ki zavira gibanje. To je sila trenja.



$$F_{tr} = k_{tr} \cdot m \cdot g$$

če je podlaga vodoravna



Če ono na klancu, je zopet potrebno reči samo tisto komponento sile teže, ki je pravokotna na klanec. Ta je $F_{g\perp} = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$$F_{tr} = k_{tr} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

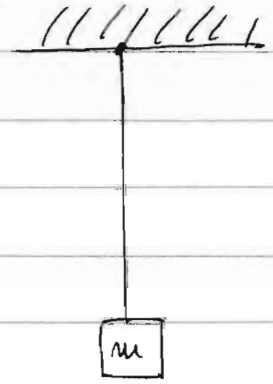
k_{tr} .... koeficient trenja (brez enote)

les-les ... $k_{tr} = 0{,}02$
samo po podlagi $k_{tr} = 0{,}02$
kovina-kovina $k_{tr} = 0.1 - 0.2$
(brez maziva)

1.2.3. Primeri uporabe Newtonovih zakonov

s kakšno silo je napeta vrvica?

a) Utež z maso 1 kg je obešena na vrvici. Za sistem vzamemo utež. Katere so zunanje sile?

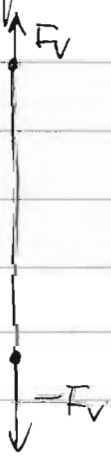


Sili sta dve: sila vrvice in sila teže:

Ker utež miruje, velja $F_v - m \cdot g = 0 \Rightarrow F_v = m \cdot g$

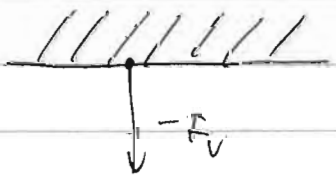
S silo vrvice torej preprečujem, da bi telo padlo. Ta sila vrvice se seveda prenaša naprej:

vrvica:



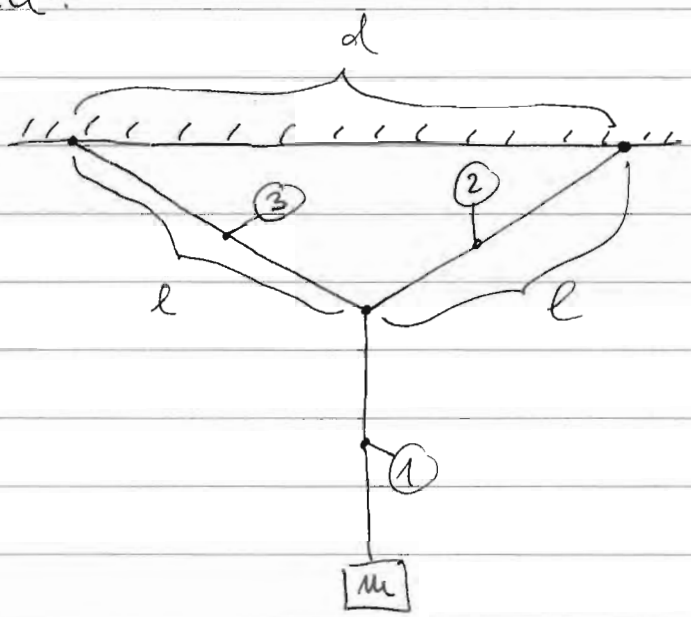
Vrvica je torej napeta s silo $F_v = m \cdot g = 1\,kg \cdot 9{,}8\,m\,s^{-2}$
$= \underline{\underline{9{,}8\,N}}$

Kaj pa strop:



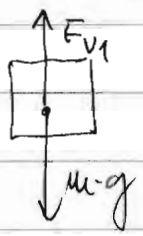
Na strop deluje masa m s silo $-F_v$ (strop se res lahko podre, če je ta sila prevelika).

b) Utež z maso 1 kg je obešena na dveh enako dolgih vrvicah z dolžino 1 m, ki sta pritrjeni na strop v razmiku 1,8 m. Izračunaj silo, s katero so napete vrvice.



$m = 1\,kg$
$\ell = 1\,m$
$d = 1{,}8\,m$

Najprej pogledamo utež, ki miruje. Zato je vsota vseh sil enaka 0:

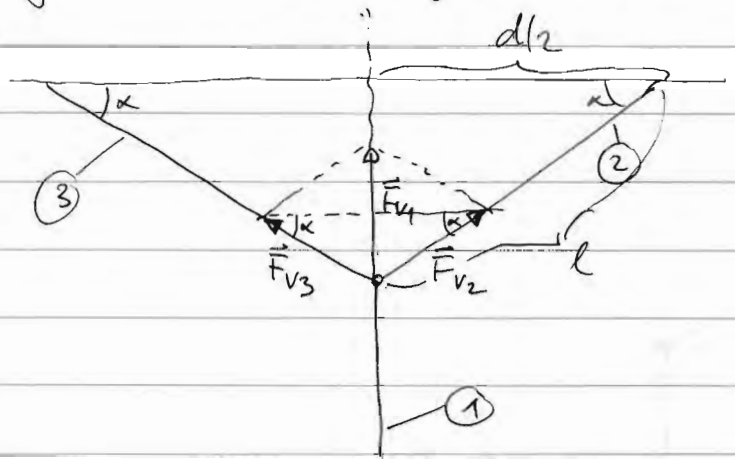


$$F_{v1} - m \cdot g = 0$$

$$F_{v1} = m \cdot g = 1\,kg \cdot 9{,}8\,m\,s^{-2} = 9{,}8\,N$$

Poglejmo vrvico št. 1: vsota vseh sil mora biti 0, ker se vrvica ne giblje!

Torej moramo vrvici št. 2 in 3. v stičišču z vrvico št. 1 ~~kompenzirati~~ delovati s skupno silo F_{v_1} v smeri nasprotno navzgor. Sili se prenašajo kakšno samo v smeri vrvice



Po velikosti sta F_{v_2} in F_{v_3} enaki! Skupaj pa se seštevata v $\vec{F}_{v_1}$.

Velja

$$F_{v_2} \cdot \sin\alpha + F_{v_3} \cdot \sin\alpha = F_{v_1}$$

$$2 F_{v_2} \cdot \sin\alpha = F_{v_1}$$

$$\boxed{F_{v_2} = F_{v_3} = \frac{F_{v_1}}{2\sin\alpha}}$$

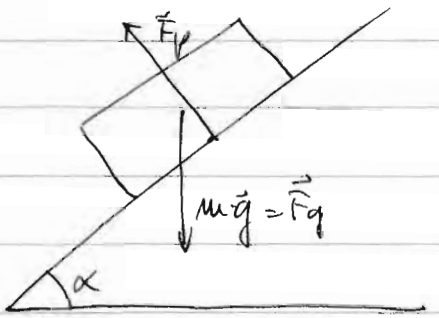
Kot α pa dobim: $\cos\alpha = \frac{d}{2\cdot l} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{d}{2l} =$

$$= \arccos 0{,}9 = \underline{25{,}8°}$$

$$F_{v_2} = \frac{9{,}8\,N}{2\cdot\sin 25{,}8°} = \frac{4{,}9}{0{,}435}\,N = \underline{11{,}3\,N}$$

Čim manjši je kot α, tem večja je sila v vrvici št. 2 in 3.

c) Sile na klancu. Telo z maso 1 kg ~~je postavljeno na~~ posuv miruje na klancu. Kolikšen je koeficient lepenja, če telo zdrsne ko nahlenbi kot klanca povečamo na 35°



Katere sile delujejo na telo, ki stoji na klancu?

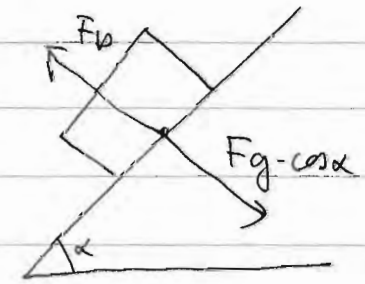
- sila teže navpično navzdol
- sila podlage $\vec{F}_p$, ki deluje $\perp$ na smer klanca.

Ker telo miruje, mora biti vsota vseh zunanjih sil enaka 0. Sile razstavim na komponente, ki so pravokotne s klancem in sile, ki so paralelne s klancem:

sile, ki so pravokotne na klanec: F_p in $F_g \cdot \cos\alpha$

Ta sila stiska ($F_g \cdot \cos\alpha$) telo ob klanec in zaradi tega se pojavi še dodatna sila v smeri paralelno s klancem, t.j. sila lepenja.

a) pravokotne sile:

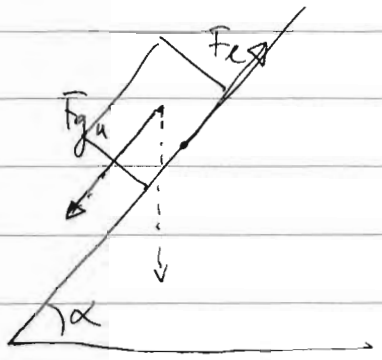


$$F_p - F_g \cdot \cos\alpha = 0$$

$$F_p - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$$

S tako silo telo tišči ob podlago.

b) sile vzporedne s klancem:



$F_{g\parallel} = F_g \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ To je komponenta sile teže, vzporedna s klancem.

$F_t = F_g \cdot \cos\alpha \cdot k_t = m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot k_t$

Pogoj $F_{g\parallel} \leq F_{t\,max}$, telo ne drsi navzdol

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha \leq m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot k_t \quad / : \cos\alpha$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \leq k_t}$$

Če je kot α prevelik, telo zdrsne. Pri katerem kotu zdrsne?

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_{max} = k_t}$$

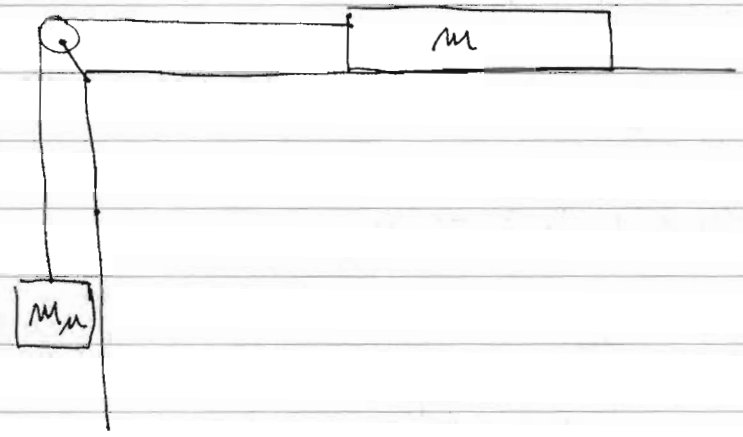
$\alpha_{max} = 35° \Rightarrow k_t = 0{,}70$

Poglejmo si na primeru, kakšni so koeficienti trenja.

d) enakomerno pospešeno gibanje

Poglejmo si eksperiment, v katerem enakomerno pospešujem vozička na zračni klopi:

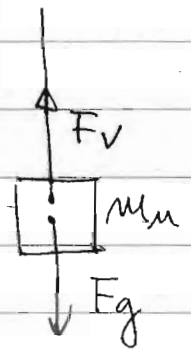
Opozori: toni točkasto telo !!!



$m =$

Kakiho teles je v sistemu? Napišemo enačbe gibanja (2. Newtonov zakon) za vsako telo posebej: Ker sta telesi povezani z vrvico, kajse ne raztegujejo, sta pospeška obeh teles enaka, imata pa različni smeri.

Utež: Katere sile delujejo na utež?



$$F_g - F_v = m_u \cdot a$$

Pazi na predznak $\vec{a}$-ja in $\vec{F}_g$

Jahač: Deluje samo sila vrvice

$$F_v = m \cdot a$$

$= \frac{0,86}{10,5} = 0,082 \Rightarrow \beta = 4,7°$

$\beta = 0,38$ deg

Imam torej dve enačbi z dvema neznankama, F_v in a

$$F_g - F_v = m_u a \qquad \text{pomen } m \text{ in } m_m$$

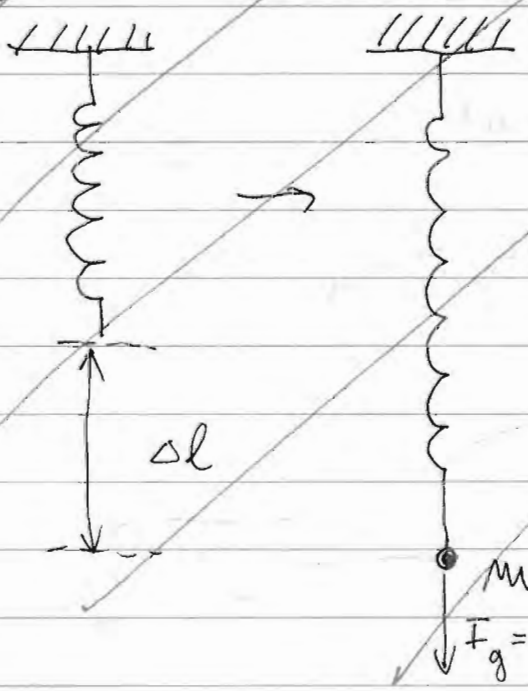
$$F_v = m \cdot a$$

Če enačbi seštejem, dobim:

$$F_g = (m + m_m) \cdot a = m_u \cdot g$$

$$\boxed{a = \frac{m_u}{m + m_m} \cdot g}$$

S čim merimo sile? Najbolj preprost merilec je vijačna vzmet:



Ko damo na vzmet maso ali jo potegnemo, se raztegne. Raztezek je sorazmeren s silo

$$\boxed{F = k \cdot \Delta l}$$

k .... koeficient vzmeti $[N/m]$

13. Izrek o gibalni količini točkastega telesa

Izhajamo iz 2. Newtonovega zakona za 1 točkasto telo

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\vec{F}$ .... zunanja sila
m .... masa točkastega telesa
$\vec{a}$ .... pospešek točkastega telesa

Spomnimo se, da je pospešek definiran takole:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

to je sprememba hitrosti v časovni enoti. Ali sprememba za $\Delta \vec{v}$ v času Δt.

Vstavim v Newtonov zakon in dobim:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad / \cdot \Delta t$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} = m\left(\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right)$$

Torej se 2. Newtonov zakon zapiše:

$$\boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}} \Rightarrow \boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{G}}$$

Uvedem novo količino: $\vec{G} = m \cdot \vec{v}$

To je gibalna količina z enoto $[kg \cdot m/s]$. ~~2 Newtonov zakon~~

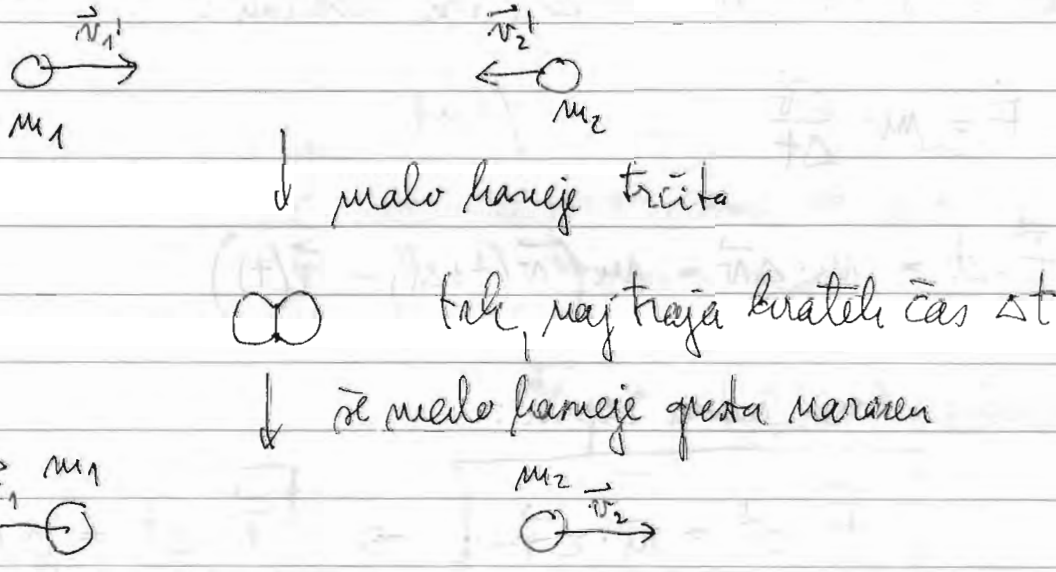
Dobili smo izrek o obremitvi gibalne količine, ki pravi: skupni smerek zunanjih sil je enak spremembi gibalne količine. Ali:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} \qquad \Delta G = m \cdot \vec{v}(t+\Delta t) - m \cdot \vec{v}(t)$$

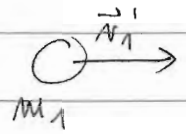
Poseben primer: $\vec{F} = 0$ (zunanje sile so enake 0).

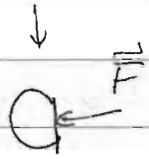
$$\vec{F} = 0 \rightarrow \Delta \vec{G} = 0$$

Kako lahko ta izrek koristno uporabimo? Poglejmo si tele dve majhni kroglici, ki pesta ena proti drugi:

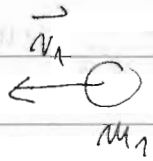


Poglejmo, kaj se dogaja s prvo kroglico:





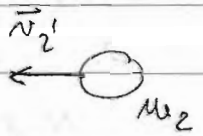
deluje sila $\vec{F}$ od druge kroglice v času trka Δt

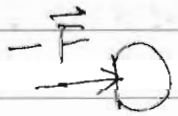


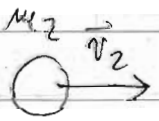
Zapišimo zakon o ohranitvi gibalne količine za to kroglico:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1'$$

Poglejmo za drugo kroglico:







$$-\vec{F} \cdot \Delta t = m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_2'$$

Imamo torej dve enačbi, eno za eno kroglico

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}\Delta t &= m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1' \\ -\vec{F}\Delta t &= m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_2' \end{aligned}\right\}$$

enačbi seštejem in dobim:

$$0 = \left(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2\right) - \left(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'\right)$$

gibalna količina obeh kroglic pred trkom

gibalna količina obeh kroglic po trku

gibalna količina obeh kroglic na koncu

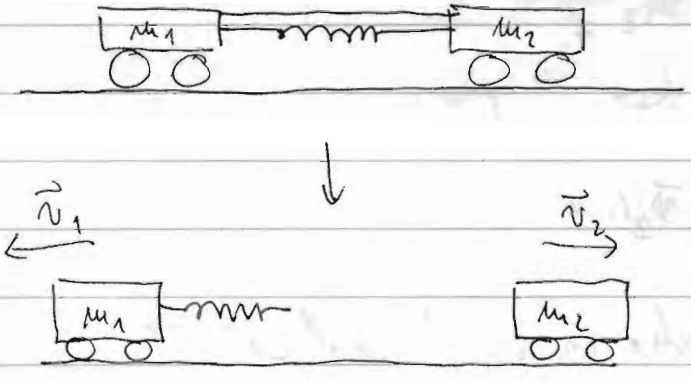
Definiram skupno gibalno količino

$$\vec{G}\,(\text{dveh teles}) = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Ker razen teh dveh teles ni nobenega drugega ni zunanjih sil, torej je gibalna količina obeh teles skupaj ohranja

$$\boxed{0 = \Delta\vec{G} = \vec{G}(t+\Delta t) - \vec{G}(t)}$$

1. Primer: Dva vozička z maso $m_1 = 1\,kg$ in $m_2 = 5\,kg$ sta na vodoravnem tiru. Med seboj sta povezana z vrvico, ki napenja vijačno vzmet med obema vozičkoma. Kolikšno je razmerje hitrosti obeh vozičkov, ko vrvico prežgemo?



$v_1' = 0$
$v_2' = 0$

$v_1 \neq 0$
$v_2 \neq 0$

Ker v vodoravni smeri ni nobene zunanje sile, se gibalna količina obeh vozičkov skupaj ohranja

$$0 = \vec{G} - \vec{G}' = \left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right) - \left(0 + 0\right) = m_2 v_2 - m_1 v_1$$

Če sta masi enaki, $m_1 = m_2$, sta hitrosti ~~in~~ nasprotno enaki. To pomeni, da vozička opravita enako veliko pot v enakem času. Če enega od vozičkov obtežimo, bo imel manjšo hitrost in bo opravil ~~i~~ krajšo pot kot lažji voziček.

2. Primer: neprožni trk dveh vozičkov.

Trki dveh ali več teles so primeri, pri katerih upoštevamo ~~zakon~~ izrek o gibalni količini.

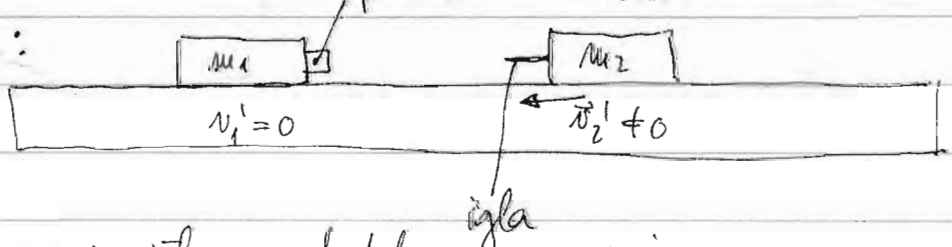
Trki → prožni: ohranja se gibalna količina
ohranja se kinetična energija

→ neprožni: ohranja se gibalna količina
ne ohranja se kinetična energija

Primer prožnega trka: trk dveh bilijardnih kroglic (skoraj)
Primer neprožnega trka: avtomobil se zaleti v steno

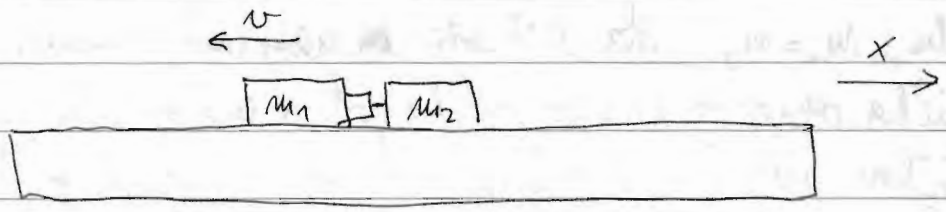
Poglejmo si poenostavljen primer dveh jahačev na zračni progi

Pred trkom:



Hitrost drugega vozička pred trkom v_2' merimo z uro.

Po trku: oba vozička sta med seboj povezana in se gibljeta z enako hitrostjo:



Za sistem štejem oba vozička skupaj, torej imam v sistemu dve telesi. Vsako telo prinese svojo gibalno količino.
Ker v vodoravni (x) smeri ne deluje nobena sila, je vsota zunanjih sil v tej smeri enaka 0! Torej velja

$$\textcircled{a}\ F\cdot\Delta t = 0 = \Delta G = \{m_1 v + m_2 v - (m_1 v_1' + m_2 v_2') =$$

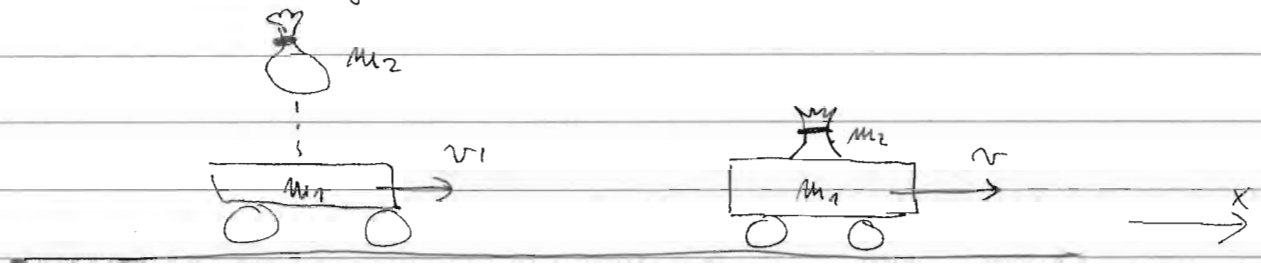
$$= (m_1 + m_2)v - m_2 v_2' \qquad \text{ker je } v_1' = 0$$

$$(m_1 + m_2)v = m_2 \cdot v_2'$$

$$\boxed{v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2'}$$

Naši vozičkov sta izkrani tako, da sta enaki, $m_1 = m_2$ torej mora biti količina hitrosti obeh vozičkov po trku enaka polovici začetne hitrosti drugega vozička.

3. Primer: Na vozičku, ki se z enakomerno hitrostjo giblje po vodoravnem tiru, vržemo vrečko s peskom v smeri navpično na tir. Kaj se zgodi s hitrostjo vozička?



ali je $v = v'$?

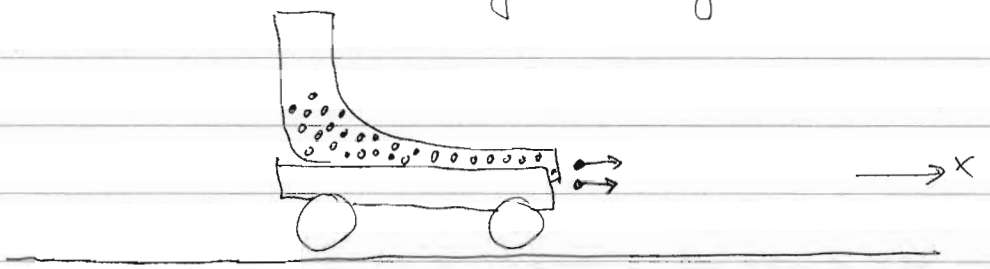
Kam je usmerjen smerni vektor sile? Travnatno na tir. To pomeni, da je smerni vektorje sile v smeri vzporedno s tirom enak 0. Torej se mora ohranjati celotna gibalna količina v tej smeri.

$$\Delta G_x = G_x - G_x' = (m_1 + m_2) \cdot v - m_1 v_1' = 0$$

$$\boxed{v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1'}$$

Ker se masa poveča, se mora hitrost zmanjšati, da ostane gibalna količina konstantna. Vozički se torej upočasni.

4. Primer: vaziček iz katerega iztekajo šibre



Zakaj se začne vaziček gibati? Iztekajoče šibre imajo gibalno količino v smeri x. Ker se mora celotna gibalna količina vozička in šiber ohranjati, se začne vaziček gibati v nasprotni smeri iztekajočih šiber. Ne kaj vas to spomnja? Na raketni motor, s čemer pridemo do sile curka.

5. Primer: Človek z maso 80 kg se vozi v avtomobilu s hitrostjo 100 km/h. Avtomobil se čelno zaleti v steno in obmiruje. Izračunaj, s kolikšno povprečno silo deluje ploščevina avtomobila na človeško telo, če je čas trka telesa in ploščevine 0,5 ms. Za koliko se zmanjša ta sila, če z zračno blazino podaljšamo čas trka na 20 ms?

$v' = 100\ km/h$

$\Delta t_1 = 0{,}5\ ms$

$\Delta t_2 = 20\ ms$

$F_1 = ?$

$F_2 = ?$

Človek z maso m in hitrostjo v' ima gibalno količino $G' = m \cdot v'$, ko se ustavi, je gib. kol. enaka 0.

Sunek sile je enak spremembi gib. količine:

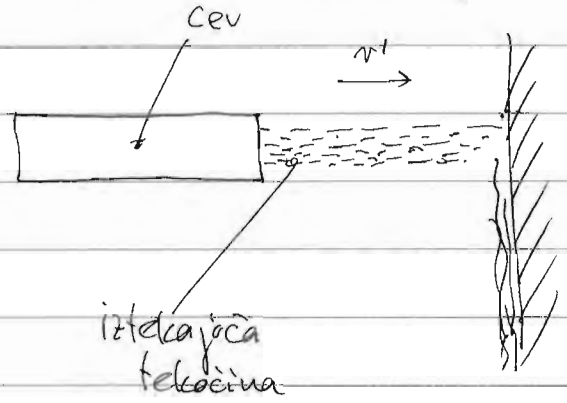
$$\Delta G = m(0 - v') = F \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{F = -\frac{mv'}{\Delta t}}$$

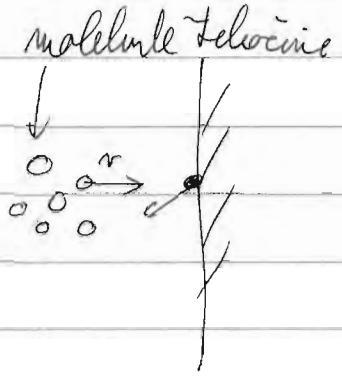
$$F_1 = \frac{80\,kg \cdot 27\,m/s}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,s} = \frac{8 \cdot 2{,}7}{0{,}5} \cdot 10^5\,N = \underline{4{,}3 \cdot 10^6\,N} \rightarrow \text{to ustrezna sila teže 430 ton!!}$$

Sila teže 1 tone je $10^3\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \approx 10^4\,N$

$$F_2 = \frac{80\,kg \cdot 27\,m/s}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,s} = \frac{8 \cdot 2{,}7}{2} \cdot 10^4\,N = \underline{10{,}8 \cdot 10^4\,N} \rightarrow \text{ustrezna sila teže 10,8 ton!!}$$

1.3.1. Sila curka in nasprotna sila curka

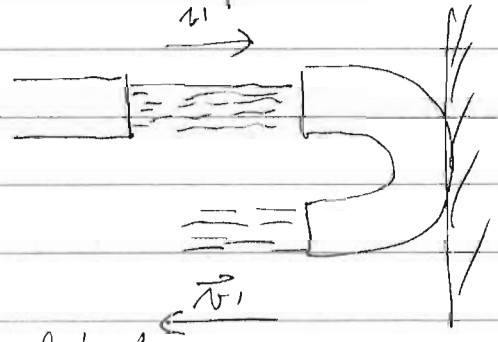




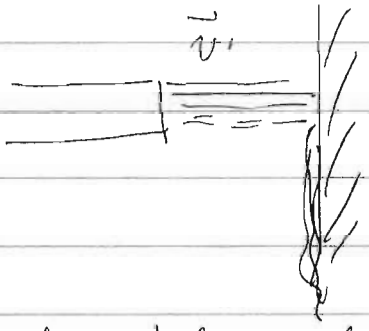
Curek tekočine s hitrostjo v' zadene mirujočo pregrado pod pravim kotom. S kolikšno silo deluje curek tekočine na pregrado?

Poglejmo si dva primera:

a)



b)



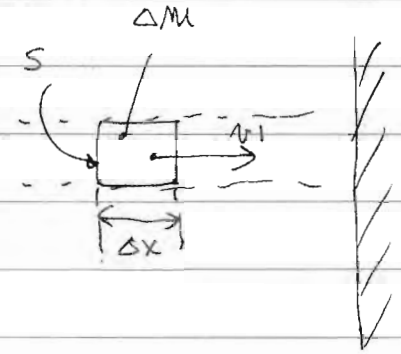
Smer hitrosti se spremeni za 180°, voda se odbije od stene v nasprotni smeri

Hitrost po trku vode s steno je praktično 0, voda paki po steni.

Za kaj gre v obeh primerih?

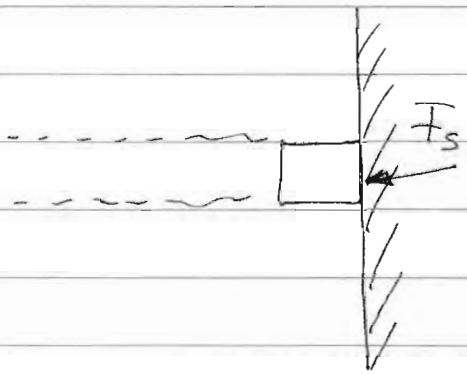
$s = \frac{1}{2} a t^2$ v

To si najlažje ogledamo, če zasledujemo gibanje majhnega dela tekočine:

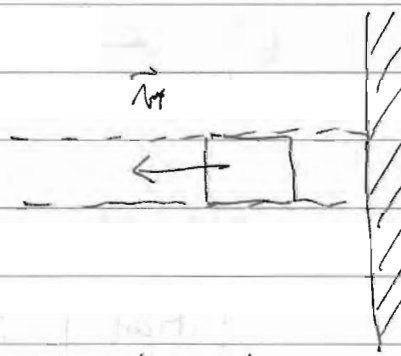


pred trkom

$\Delta m = \rho \cdot \Delta x \cdot S$



tik tekočine o steno



tekočina se od odbije od stene ali pa spolzi.

V obeh primerih velja, da je sprememba gibalne količine delčka vode zaradi sile stene F_s.

Toglejmo gibalno količino na začetku, pred trkom

$$G' = \Delta m \cdot v' = \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v'$$

Po trku: $G = -\rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v$

Smeh sile je torej enak

$$F_s \cdot \Delta t = -\rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v - \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v' =$$

$$= -\rho \cdot S \cdot \Delta x \, (v + v') \qquad / : \Delta t$$

$$F_s = -\rho \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} (v + v')$$

to je sila, s katero stena deluje na tekočino. Sila tekočine na steno mora biti ravno obratna

$$F_c = \rho \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} (v + v') = \rho \cdot \Phi_v (v + v') = \Phi_m (v + v')$$

$$\boxed{F_c = \Phi_m (v + v')}$$

Φ_m .... masni pretok skozi cev (koliko kg vode steče vsako sekundo skozi cev $m/\Delta t$)

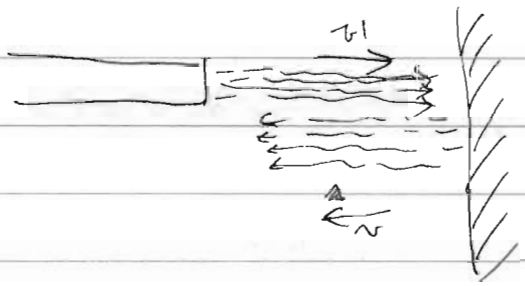
a) V primeru, da se voda odbije z enako hitrostjo

$$v = v' \Rightarrow \boxed{F_c = 2 \Phi_m \cdot v'}$$

b) V primeru, da voda po trku spolzi ob steni, $v = 0$

$$\boxed{F_c = \Phi_m \cdot v'}$$

Primer: iz plastične cevi s premerom 2 cm steče vsako minuto 30 l vode v vodoravni smeri. S kalibrirano steklo delimo curek vode na navpično steno, če se voda odbije od stene z enako veliko hitrostjo v vodoravni smeri?



$F_c = 2 \cdot \phi_m \cdot v'$ Izračunati moramo v' in ϕ_m

$$\phi_m = \frac{\rho \cdot S \cdot \Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{30\,dm^3 \cdot 1\,kg/dm^3}{60\,s} = 0{,}5\,kg/s$$

Masni tok vode je torej $0{,}5\,kg/s$.
Kolikšna je hitrost vode?

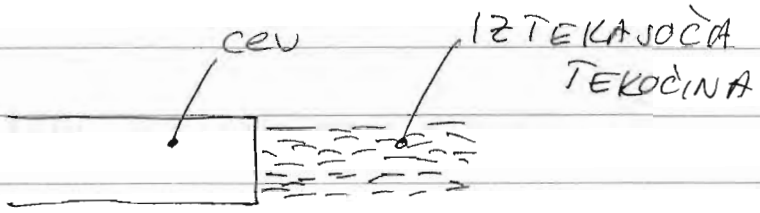
$$\phi_m = \rho \frac{S \cdot \Delta x}{\Delta t} = \rho \cdot S \cdot v' \Rightarrow \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = v' \text{ to je ravno hitrost iztekajoče tekočine}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{\phi_m}{\rho \cdot S} = \frac{0{,}5\,kg \cdot dm^3}{1\,kg \cdot \pi\,1\,cm^2} =$$

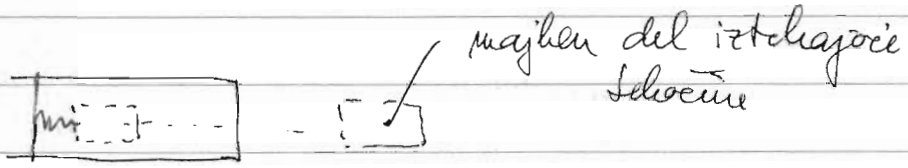
$$= \frac{0{,}5}{\pi} \cdot \frac{dm^3 \cdot 10^3\,cm^3}{1\,cm^2} = 159\,cm/s = 1{,}59\,m/s$$

$$F_c = 2 \cdot \phi_m \cdot v' = 2 \cdot 0{,}5\,kg/s \cdot 1{,}59\,m/s = 1{,}59\,kg\,m\,s^{-2} = \underline{1{,}59\,N}$$

Vzgonska sila curka:



Nekaj vas bo spomnilo? Na raketo. Iz izkušenj vemo, da na cev deluje sila iztekajočega curka. Od kod pride ta sila



Delcek tekočine, ki odleti iz cevi, vzame s seboj gibalno količino. Ker se mora gibalna količina v celoti ohraniti (ni zunanjih sil), deluje na cev (šobo) sila curka, ki je enaka

$$F_{reakc} = \Phi_m \cdot v$$

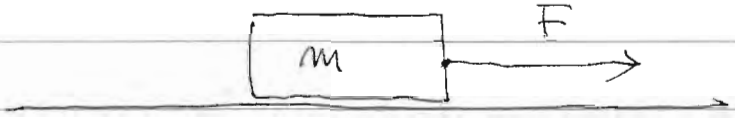
Φ_m ... masni pretok po cevi

v ... hitrost iztekajoče tekočine

Ohranitev energije točkastega telesa

1.4. Izrek o ohranitvi polne energije točkastega telesa

1.4.1. Kinetična energija in delo zunanjih sil



Telo z maso m je postavljeno na vodoravno podlago, po kateri lahko drsi brez trenja. Telo vlečemo s konstantno silo $\vec{F}$ v smeri vzporedno s podlago. Definiramo delo zunanje sile F, ki premakne telo z maso m za razdaljo s:

$$A = F \cdot s$$

A ... delo zunanje sile
F ... zunanja sila
s ... premik telesa v smeri zunanje sile $\vec{F}$!

Poglejmo, ali se da povezati delo zunanje sile A in hitrost telesa, potem ko se je premaknilo za razdaljo s? Ker je F konstantna, se telo z maso m giblje enakomerno pospešeno:

$$F = m \cdot a \Rightarrow A = F \cdot s = m \cdot a \cdot s$$

Vemo pa, da velja za enakomerno pospešeno gibanje

$$v^2 = v'^2 + 2ax$$

v' ... začetna hitrost
v ... končna hitrost
x ... pot

$$v^2 = v'^2 + 2as \Rightarrow a \cdot s = \frac{1}{2}(v^2 - v'^2)$$

To vstavim v zgornjo enačbo za delo in dobim

$$A = m \cdot a \cdot s = m \cdot \frac{1}{2}(v^2 - v'^2) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2$$

$150\,km/h = 41{,}6\,m/s$

$120\,km/h = \frac{120}{3{,}6}\,m/s = 33{,}3\,m/s$

Definiram kinetično energijo točkastega telesa:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

$$\boxed{A = W_k - W_k'}$$

Primer 1: kolikšna je kinetična energija avtomobila z maso 1200 kg, ki vozi s hitrostjo 120 km/h? Za kolikokrat se energija poveča pri hitrosti 150 km/h

$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200\,kg \cdot 33^2\,m^2/s^2 =$

$= 600 \cdot 33^2\,J = \underline{\underline{666\,kJ}}$ | $600 \cdot 41{,}6^2\,J = 1\,MJ$

$4200\,J/kgK$: energija potrebna za segretje 2 l vode 1 l vode za 1 K. $\Rightarrow$ za $\underline{\underline{160\,K}}$

segreti za 80°

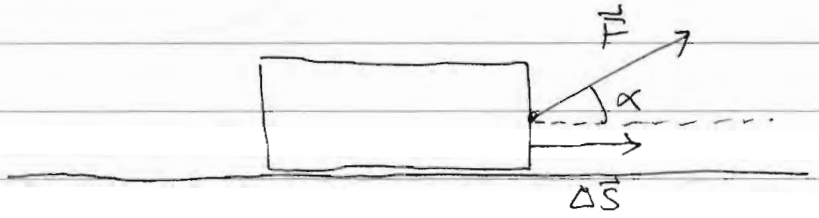
~~Delo zunanjih~~ To je izrek o kinetični energiji točkastega telesa, ki pravi:
delo zunanjih sil je enako spremembi kinetične energije.

V čem merimo delo in energijo:

$$A = F \cdot s \qquad [N \cdot m] = [J] \qquad \text{Joule}$$

Pomembno:
V splošnem je smer gibanja telesa različna od smeri posamezne sile, ker lahko delujejo še ostale sile.

Kot primer si oglejmo vlečenja telesa po vodoravni podlagi:



Sila $\vec{F}$ deluje pod kotom α glede na podlago, v smeri katere se telo gibije. Zato delo v splošnem definiramo kot skalarni produkt

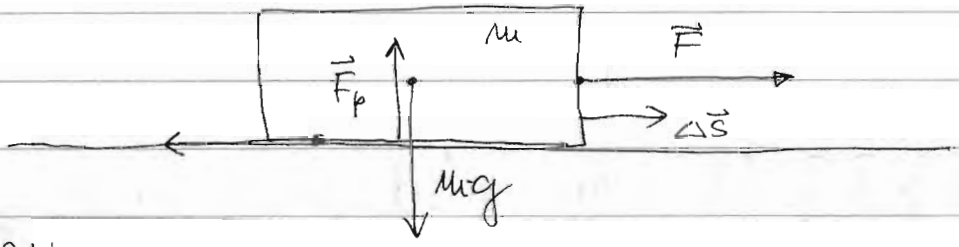
$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s$$

$\vec{F}$ .... vlečna sila
$\Delta\vec{s}$ .... pomik telesa
α .... kot med silo in smerjo premika telesa

$F \cdot \cos\alpha$ .... projekcija $\vec{F}$ na smer pomika $\Delta\vec{s}$

Celotno delo sile na določeni poti dobimo s seštevanjem prispevkov ΔA.
Kaj torej naredimo v primeru, ko imamo več sil, ki delujejo na dano telo? Upoštevati moramo delo vseh sil, vsake posebej.
Poglejmo si to na prvi dveh različnih primerih:

Primer 1: Na vodoravni podlagi miruje telo z maso $m = 1\,kg$. Telo začnemo vleči s konstantno silo $2N$ v vodoravni smeri. Koeficient trenja s podlago je $k_{tr} = 0.1$. Kolikšna je kinetična energija telesa po $10\,m$ opravljene poti? Kolikšno delo opravimo? Kam gre razlika?



$F = 2N$

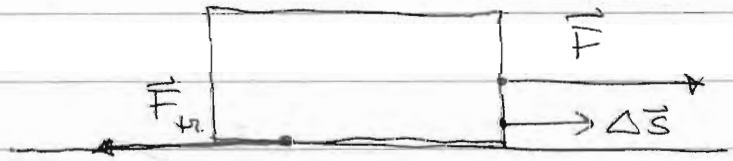
$m = 1\,kg$

$s = 10\,m$

$W_k = ?$

$A = ?$

Narišem vse sile, ki delujejo na telo. $\vec{F}_g$ in $\vec{F}_p$ sta v ravnovesju in delujeta pravokotno na pomik $\Delta\vec{s}$. Zato je delo teh dveh sil enako 0. Moram pa upoštevati silo trenja



$\Delta\vec{s}$ .... smer premika telesa

Delo zunanjih sil v smeri premika je torej sestavljeno iz dveh prispevkov:

$$\Delta A = \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{s} + \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = -F_{tr} \cdot \Delta s + F \cdot \Delta s = W_k - W_k' = W_k$$

($\cos(180°) = -1$; $W_k' = 0$)

$$W_k = F \cdot \Delta s - F_{tr} \cdot \Delta s = (F - F_{tr}) \cdot \Delta s = (F - mg k_{tr}) \cdot \Delta s =$$

$= (2N - 1kg \cdot 9{,}8 m/s^2 \cdot 0{,}1) \cdot 10m =$

$= (2N - 0{,}98 kg\,m/s^2) \cdot 10m = 1{,}02 \cdot 10 Nm = \underline{\underline{10{,}2J}}$

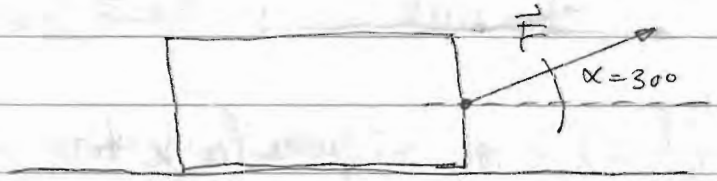
Kinetična energija telesa se poveča za 10,2 J.
Kolikšno delo opravi sila $\vec{F}$?

$A_{\vec{F}} = F \cdot \Delta s = 2N \cdot 10m = \underline{\underline{20J}}$

Kam gre razlika? Razliko pobere sila trenja, katere delo je negativno (gre ven iz telesa) in se spremenja v toplota.

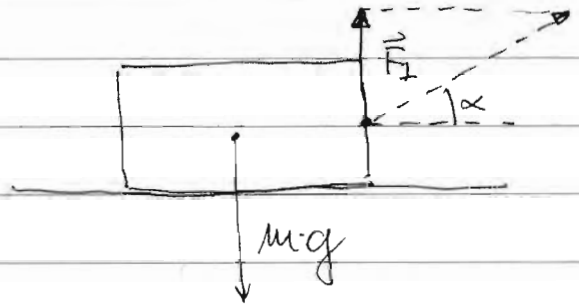
Primer 2: Na vodoravni podlagi miruje telo z maso $m = 1kg$. Telo začnemo vleči s konstantno silo 2N v smeri 30° glede na vodoravnico. Koeficient trenja s podlago je $k_{tr} = 0.1$. Kolikšna je kinetična energija telesa po 10 m opravljene poti?

$m = 1kg$
$F = 2N$
$k_{tr} = 0.1$
$\alpha = 30°$
$W_k = ?$



Najprej moramo, kam se giblje telo, saj sila $\vec{F}$ ni edina sila, ki deluje na to telo. Opazujemo, ali se giblje v smeri vodoravno s podlago ali telo tudi dvigujemo!

Poglejmo sile, ki delujejo v navpični smeri! To sta tista teže in vertikalna komponenta sile $\vec{F}$:



$$F_\perp = F \cdot \sin\alpha$$

Če bo $F_\perp > mg$, bomo telo tudi privzdignili, kar pomeni, da ne bo trenja s podlago. Poglejmo, če se to res zgodi:

$$F_\perp > m \cdot g \; ? \text{ ali to velja}$$

$$\left.\begin{aligned} F_\perp &= F \cdot \sin\alpha = 2N \cdot \sin 30° = 2N \cdot 0{,}5 = 1N \\ m \cdot g &= 1kg \cdot 9{,}8 ms^{-2} = 9{,}8N \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_\perp < m \cdot g$$

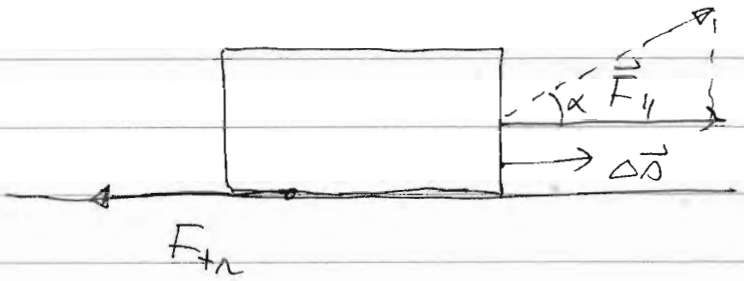
Telo je res cas v stiku s podlago, nanjo pa pritiska s silo

$$F_p = m \cdot g - F_\perp = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$$

Ta sila na podlago povzroča silo trenja:

$$F_{tr} = k_{tr} \left(m \cdot g - F \cdot \sin\alpha \right)$$

V vodoravni smeri tako delujeta dve sili:



$F_{\parallel} = F \cdot \cos\alpha$

$\Delta\vec{s}$ ... smer pomika

$$A = \vec{F}_{\parallel} \cdot \Delta\vec{s} + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{s} = F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s - F_{tr} \cdot \Delta s =$$

$$= F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s - (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha) \cdot k_{tr} \cdot \Delta s = W_k - \overset{0}{W_k'} = W_k$$

$$\boxed{W_k = \Delta s \cdot (F \cdot \cos\alpha - k_{tr}(m \cdot g - F \cdot \sin\alpha))}$$

Izračunajmo kolikšna je v tem primeru W_k:

$$W_k = 10\,m \cdot (2N \cdot \cos 30° - 0{,}1 \cdot (9{,}8N - 1N)) =$$

$$= 10\,m\,(1{,}73 - 0{,}88)\,N = \underline{\underline{8{,}5\,J}}$$

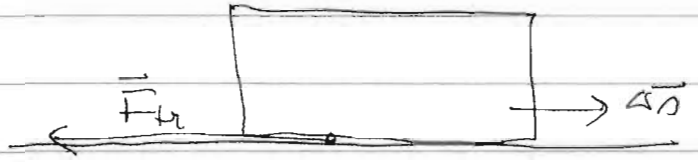
, to je manj, kot v prejšnjem primeru!

Kolikšna je hitrost? $W_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{2 W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}5\,kg\,m^2/s^2}{1\,kg}} = \underline{\underline{4{,}1\,m/s}}$$

Primer 3: Avtomobil mase m se giblje s hitrostjo $v = 72\,km/h$. V nekem trenutku blokiramo kolesa, tako da avtomobil začne drseti. Na kolikšni razdalji se avtomobil ustavi, če je koeficient trenja med kolesi in cesto $k_{tr} = 0.5$. Kolikšna je ta razdalja na poledenelem cestišču s koeficientom trenja $k_{tr} = 0{,}05$?

$$v = 72\,km/h = \frac{72 \cdot 10^3\,m}{3{,}6 \cdot 10^3\,s} = 20\,m/s$$



$$A = \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{s} = -F_{tr} \cdot \Delta s = \overset{=0}{W_{k}} - W_{k}' = -W_{k}' = -\frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = F_{tr} \cdot \Delta s = m \cdot g \cdot k_{tr} \cdot \Delta s$$

$$\boxed{\Delta s = \frac{v^2}{2 g k_{tr}}}$$

$$\Delta s_1 = \frac{20^2\,m^2/s^2}{2 \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 0{,}5} = 41\,m$$

$$\Delta s_2 = \frac{20^2\,m^2/s^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}05\,m/s^2} = \underline{\underline{410\,m}}$$

Primer 4: Neprožni trk dveh vozičkov na zračni progi.
Zadnjič smo pokazali, da velja zakon o ohranitvi gibalne količine:

$m_1 = 10\,kg$
$v_1' = 10\,m/s$
$m_2 = 2\,kg$
$v_2' = 0$

$$\vec{F}\cdot\Delta t = \vec{G} - \vec{G}' \Rightarrow F\cdot\Delta t = 0 \qquad G = G'$$

$$(m_1 + m_2)v = m_1 \cdot v'$$

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot v'$$

Ker je $m_1 = m_2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}v'$

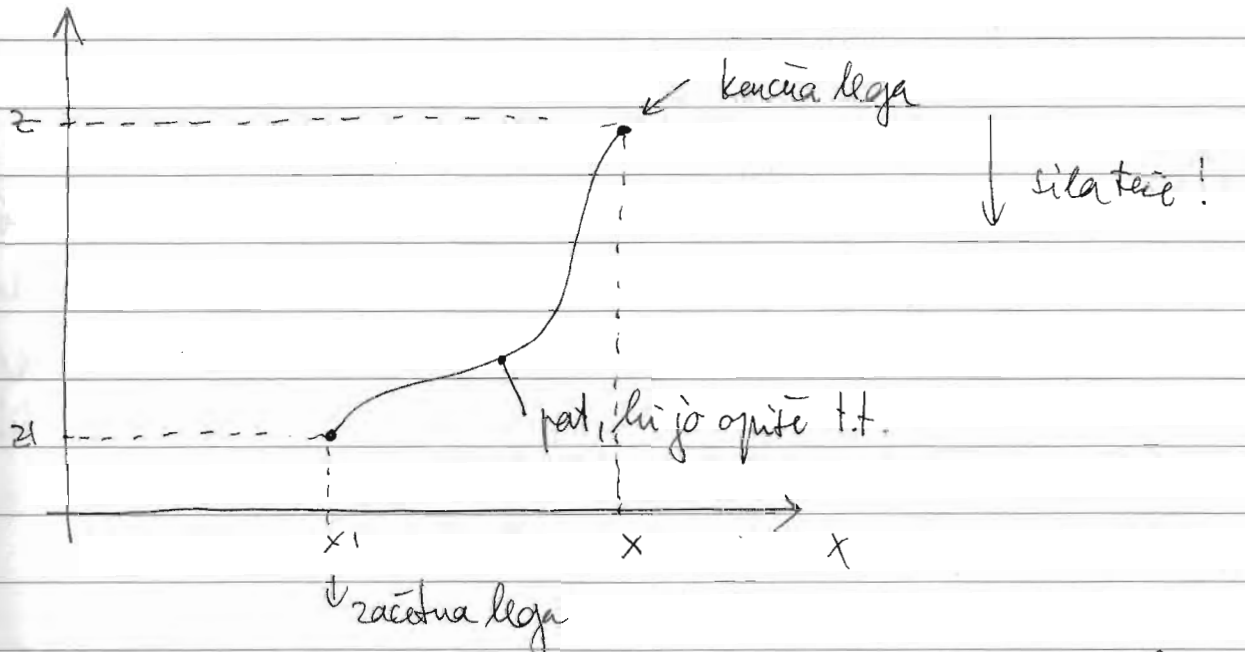
Kolešna pa je energija pred trkom in po njem?

$$W_k - W_k' = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 - \frac{1}{2}m_1 v'^2 = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\frac{v'^2}{4} - \frac{1}{2}mv'^2 =$$

$$= \frac{1}{4}mv'^2 - \frac{1}{2}mv'^2 = -\frac{1}{4}mv'^2 < 0 \quad !!$$

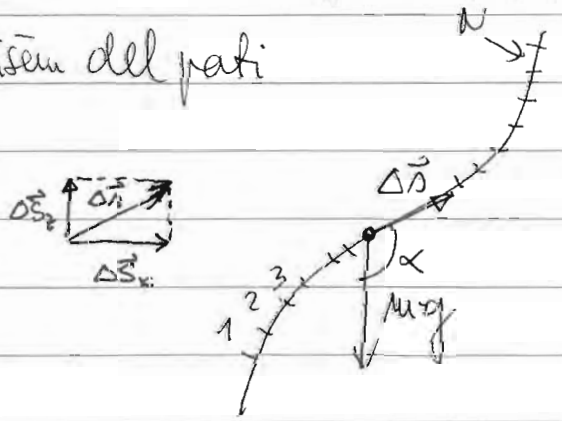
Kinetična energija se torej zmanjša! Kam je šla?
Šla je v deformacijsko energijo, oziroma v gretje plutovnostega zamovska in igle.
Torej kljub temu, da je delo zunanjih sil enako nič, energijski zakon v taki obliki, kot smo ga zapisali ne velja!

1.4.2. Delo sile teže, potencialna energija t.t.



Poglejmo, kakšno delo opravi sila teže, ko točkasto telo premaknemo iz začetne lege na višini z_1 do končne lege na višini z!

Narišem del poti



$$\Delta\vec{s} = (\Delta s_x, \Delta s_z)$$

$$\vec{F}_g = (0, -m \cdot g)$$

$$\Delta A = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{s} = -m \cdot g \cdot \Delta s_z$$

Če sedaj seštejem vse prispevke k delu, naj bo N odsekov

$$A_{\text{sile teže}} = \sum_{\text{vseh odsekov}} -m \cdot g \cdot \Delta s_z = -mg \sum_{\text{vseh odsekov}} \Delta s_z = -m \cdot g (z - z_1)$$

Delo je odvisno samo od razlike višin!! Neglede na pot, ki jo opravimo vmes, je delo odvisno samo od razlike!

Tramio, da je sila teže konservativna sila!
Celotno delo zunanjih sil razdelim na

$$A = A_{teže} + A_{\substack{ostale\\sile}} = W_k - W_k'$$

$$A_{\substack{ostale\\sile}} = W_k - W_k' - A_{teže} = W_k - W_k' + m \cdot g (z - z') =$$

$$= W_k - W_k' + m \cdot g \cdot z - m \cdot g \cdot z'$$

Uvedemo potencialno energijo telesa: $W_p = m \cdot g \cdot z$
Je odvisna samo od višine, na kateri se telo nahaja!
Izrek o ohranitvi energije sedaj zapišemo:

$$\boxed{A_{\substack{ostale\\sile}} = W_k - W_k' + W_p - W_p'}$$

Delo zunanjih sil razen sile teže je enako spremembi kinetične energije in potencialne energije telesa.

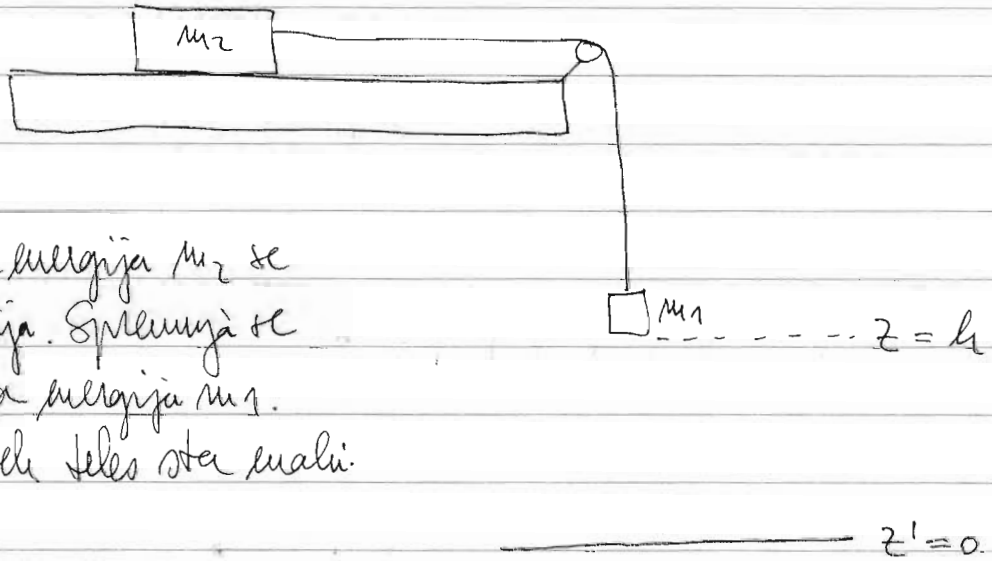
Primer 1: Kroglico vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo 10 m/s. Do katere višine se bo povzpela?

$$A_{\substack{ostale\\sile}} = 0 = W_k - W_k' + W_p - W_p' = -\underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{W_k'} + m \cdot g (z - z')$$

($W_k = 0$, $W_p' = 0$)

$$z - z' = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2 m^2/s^2}{2 \cdot 9{,}8 m/s^2} = \underline{5{,}1 m}$$

Primer 2: Pospeševanje telesa na zračni progi:



Potencialna energija m_2 se ne spreminja. Spreminja se potencialna energija m_1.
Hitrosti obeh teles sta enaki.

$$A_{\text{zunanje sile}} = 0 = W_k - W_k' + W_p - W_p' =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 - 0 + m_1 g h - 0 - m_1 \cdot g \cdot h$$

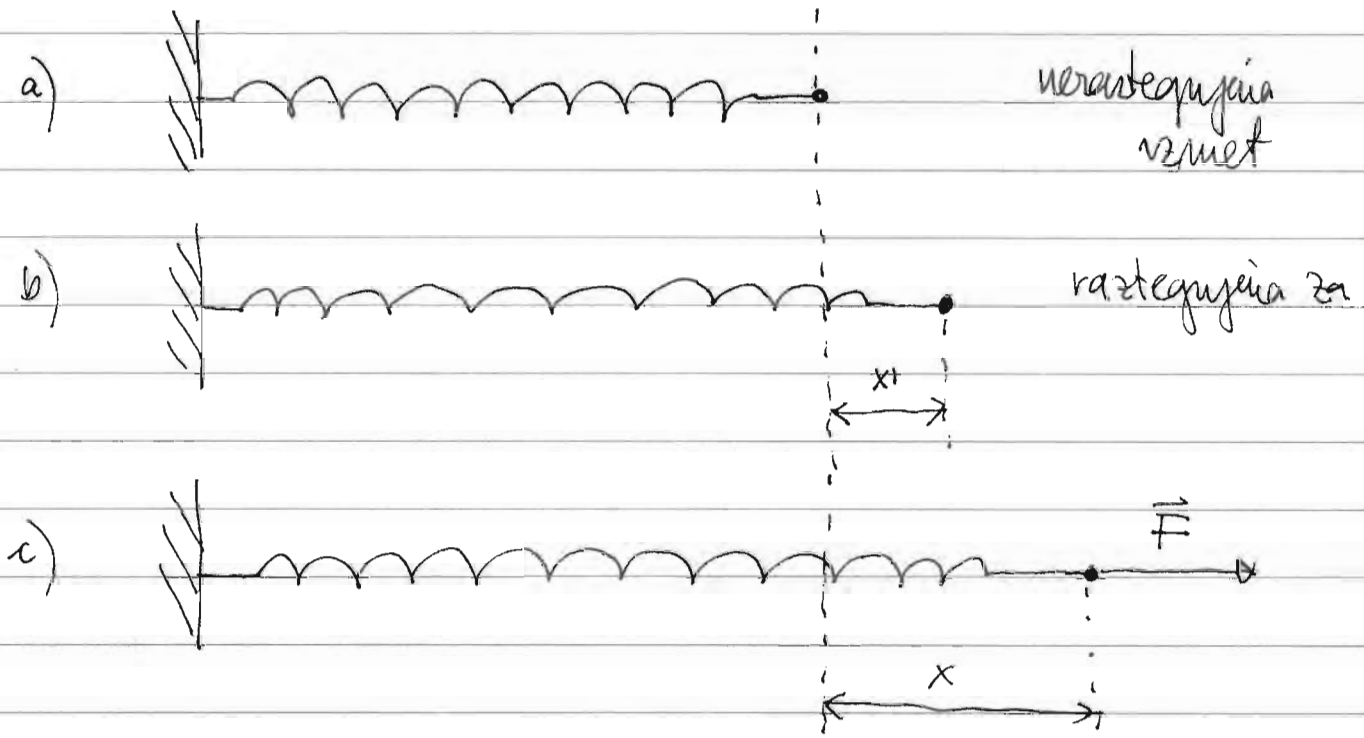
$$\frac{v^2}{2}(m_1 + m_2) = m_1 g h \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2 m_1 g \cdot h}{m_1 + m_2}}}$$

Izmerim hitrost vozička z maso m_2 pokaže ko m_1 dotakne tla.

$v = 0{,}789\ m/s$

1.4.3. Prožnostna energija

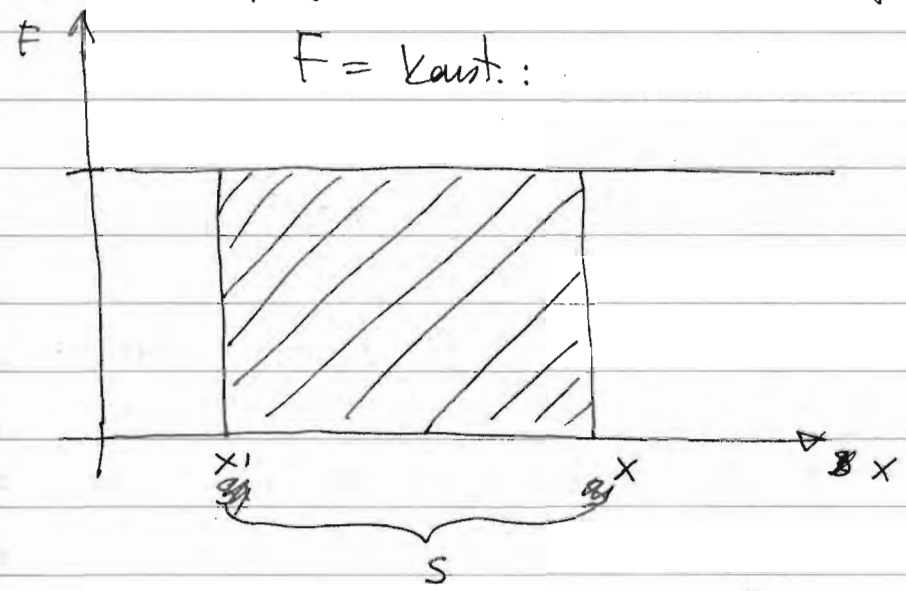
Poglejmo delo, ki ga opravlja zunanja sila pri raztegovanju vzmeti:



Z zunanjo silo raztegnem vzmet od začetnega raztelka x' do končnega raztelka x. Kolikšno delo opravi pri tem zunanja sila?

Ugotovimo: Ko vzmet raztegujemo, se mora zunanja sila tem ustrezno povečevati, ni konstantna, ker velja $F = k \cdot x$. Sila sčasoj spreminja, medtem ko vzmet raztegujemo od začetne lege x' do končnega raztelka x. Kako s tem primerom izračunati delo sile?

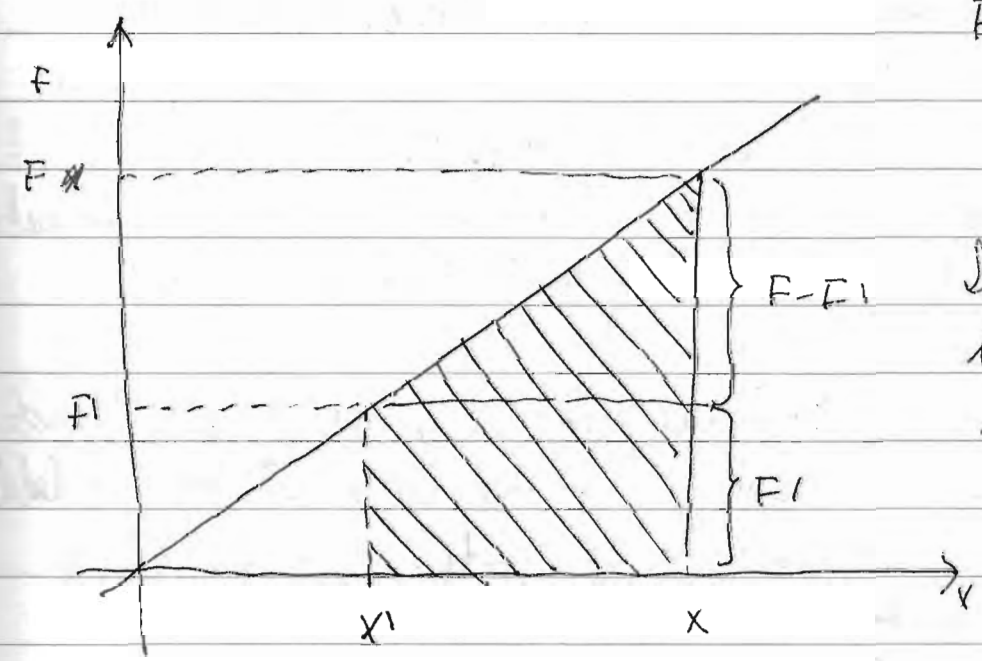
Poglejmo si pojem dela, ki ga opravlja konstantna sila $\vec{F}$:



sila se s premikom ne spreminja

V tem primeru je $A = \vec{F} \cdot s = F(x - x_1)$ To je torej ploščini lika pod krivuljo, ki kaže odvisnost sile pri premikanju telesa.

Kaj pa pri raztezku vzmeti? Vemo, da sila vzmeti sorazmerna z raztezkom vzmeti:



$F = k \cdot x$ to je enačba premice

Delo je zopet ploščina lika pod krivuljo, ki kaže odvisnost sile od raztezka (ali poti)

Izračunam ploščino osenčenega lika, ki predstavlja delo:

$$A = (x - x^1)F^1 + \frac{1}{2}(F - F^1)(x - x^1) =$$

Velja $F^1 = k \cdot x^1$

$\underline{F = k \cdot x}$

$$= (x - x^1) \cdot k \cdot x^1 + \frac{1}{2} k (x - x^1)(x - x^1) =$$

$$= k \cdot x \cdot x^1 - k \cdot x^{1^2} + \frac{1}{2} k (x^2 + x^{1^2} - 2 x x^1) =$$

$$= k x \cdot x^1 - k \cdot x^{1^2} + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x^{1^2} - k x \cdot x^1 =$$

$$= \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k \cdot x^{1^2}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x^{1^2}}$$

Delo, ki ga opravi zunanja sila pri stiskanju ali raztezanju vzmeti je torej odvisno samo od začetnega in končnega raztezka vzmeti, ne pa od tega, kar se je z vzmetjo dogajalo. Sila vzmeti je torej konservativna sila, ustrezna energija vzmeti pa je odvisna samo od končnega in začetnega raztezka. Zaradi tega uvedemo prožnostno energijo:

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2} k x^2}$$

to je energija, ki je shranjena v vzmeti, če je raztegnjena za x. To energijo lahko dobimo iz vzmeti.

k ... prožnostna konstanta
x ... raztezek vzmeti

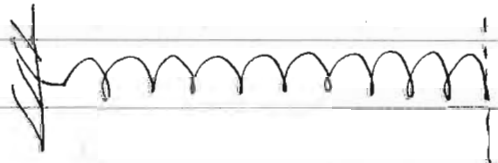
Izrek o ohranitvi energije se zdaj glasi:

$$A_{ZVN} = W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_{prož} - W_{prož}'$$

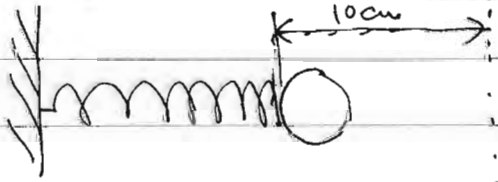
Delo zunanjih sil razen sile teže in sile vzmeti je enako vsoti sprememb kinetične, potencialne in prožnostne energije.

Primer 1: Vijačna vzmet s koeficientom $k = 10\,N/m$ je postavljena v podaljšani smeri. Vzmet stisnemo za 10 cm in predmet postavimo majhno kroglico z maso 10 g. S kakšno hitrostjo odleti kroglica, potem ko vzmet spustimo. Maso vzmeti zanemari!

a) neraztegnjena vzmet

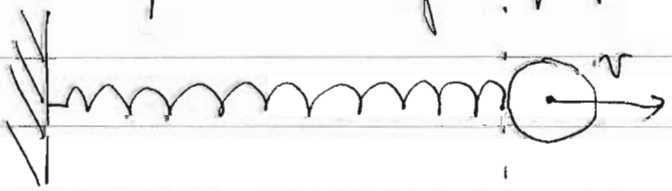


b) vzmet stisnemo:



$$W_k' = 0, \quad W_{prož} = \frac{1}{2} k x'^2$$

c) vzmet sprostimo. Kroglica pospeši do lege, v kateri je vzmet



$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \qquad W_{prož} = 0$$

Ker drugih sil v vodoravni smeri ni, velja

$$A = 0 = W_k - W_k' + W_{prož} - W_{prož}'$$

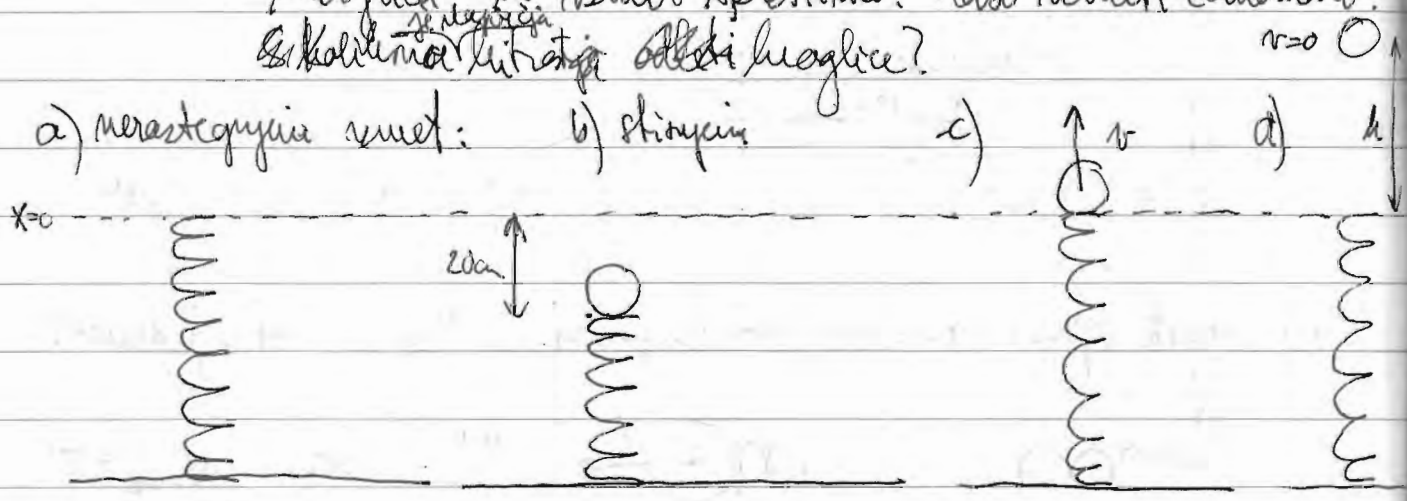
$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

$$v^2 = \frac{k}{m} \cdot x^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x}$$

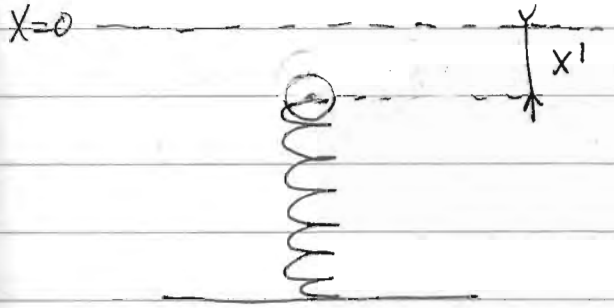
$$v = \sqrt{\frac{10\,N}{m \cdot 0{,}01\,kg}} \cdot 0{,}1\,m = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^2\,kg\,m/s^2}{m \cdot kg}} \cdot 0{,}1\,m = \sqrt{1000} \cdot 0{,}1\,m/s = \underline{\underline{3{,}1\,m/s}}$$

Primer 2: Vijačna vzmet s koeficientom 50 N/m je postavljena v navpični smeri. Vzmet stisnemo za 20 cm in na njen konec postavimo majhno kroglico z maso 20 g. Do kolikšne višine skoči kroglica, ko vzmet sprostimo. Maso vzmeti zanemari! Kolikšna je najvišja hitrost kroglice?



Za začetno stanje si izberemo ničelno raven:

b)

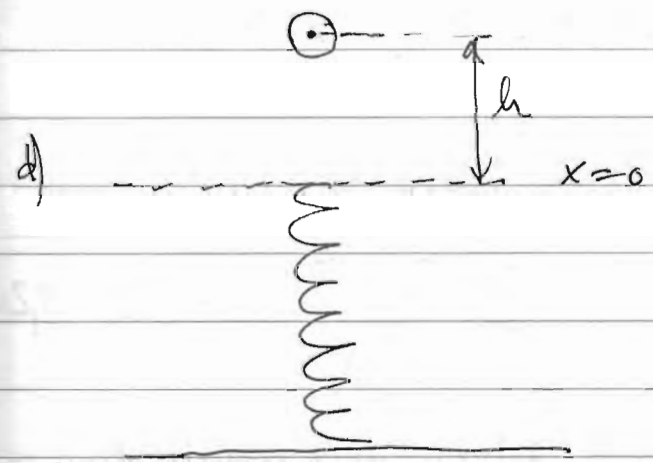


$W_{prož}' = \frac{1}{2} k \cdot x'^2$

$W_p' = m \cdot g \cdot (-x')$

$W_k' = 0$ (ker miruje)

Na koncu:



$W_{prož} = 0$ ker ni raztegnjenega vzmetnega nihala.

$W_k = 0$ ker miruje

$W_p = +m \cdot g \cdot h$

Zapišemo izrek o ohranitvi energije

$$A = 0 = W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_{prož} - W_{prož}'$$

$$0 - 0 + mg \cdot h - (m \cdot g(-x')) + 0 - \frac{1}{2} k x'^2 = 0$$

$$m \cdot g h + m \cdot g \cdot x' - \frac{1}{2} k x'^2 = 0$$

$$\boxed{h + x' = \frac{1}{2} \frac{k}{m \cdot g} \cdot x'^2}$$

$N = kg\,m/s^2$

$$h = \frac{1}{2}\,\frac{k}{mg}\,x'^2 - x' = \frac{1}{2}\cdot\frac{50\,N\;\;0{,}2^2\,m^2}{m\cdot 0{,}02\,kg\cdot 9{,}8\,m/s^2} - 0{,}2\,m =$$

$$= \frac{50\cdot 0{,}2^2}{0{,}04\cdot 9{,}8}\,m - 0{,}2\,m = 5{,}1\,m - 0{,}2\,m = \underline{\underline{4{,}9\,m}}$$

Kolikšna je največja hitrost kroglice? Največja je takrat, ko vzmet nehla pospeševati kroglico, ko je vzmet nerastegnjena. Energije so takrat:

$$W_{k} - W_{k}' + W_{p} - W_{p}' + W_{vzm} - W_{vzm}' = 0$$

$$W_{k} - 0 + m\cdot g\cdot \overset{0}{\cancel{h}} - (-m\cdot g\cdot(-x')) + 0 - \frac{1}{2}k x'^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}m\cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2}k x'^2 - m\cdot g\cdot x'$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}\cdot x'^2 - 2gx'} = \sqrt{\frac{50\,N\;\;0{,}2^2\,m^2}{m\cdot 0{,}02\,kg} - 2\cdot 9{,}8\,m/s^2\cdot 0{,}2\,m} =$$

$(kg\,m/s^2)$

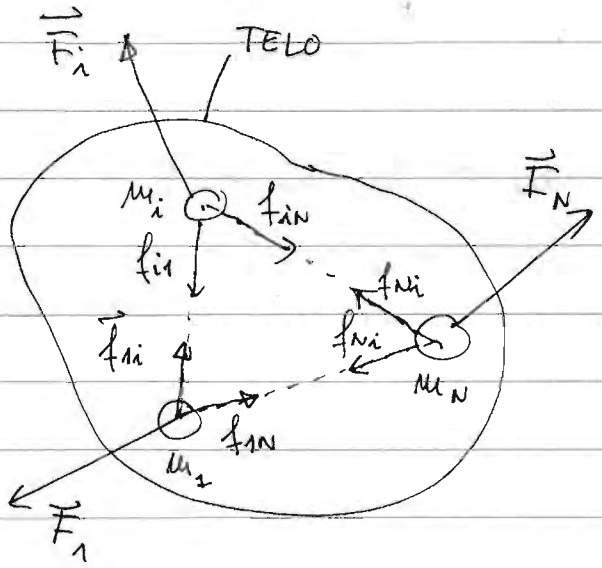
$$= \sqrt{\frac{50\cdot 0{,}2^2}{0{,}02} - 0{,}4\cdot 9{,}8}\cdot m/s = \sqrt{100 - 3{,}92}\,m/s = \underline{\underline{9{,}8\,m/s}}$$

2. MEHANIKA TOGIH TELES

Togo telo je tisto telo, ki je trdno v primerjavi s silami, ki na to telo delujejo.

2.1.1. Težišče togega telesa

Kot primer si mislimo togo telo sestavljeno iz N mamih točk, ki med sebaj delujejo s silami, obenem pa na telo delujejo še zunanje sile



f_{1i} ... sila med prvim in i-tim ~~telesom~~ telesom v telesu

f_{1N} ... sila med prvim in N-tim telesom v telesu

$\vec{F}_i$ ... zunanja sila na i-to mamo točko

Zapišem gibalno količino N delcev, ki tvorijo telo:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{N} \vec{G}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i$$

m_i ... masa i-te točke
$\vec{v}_i$ ... hitrost i-te točke

Izračunam še spremembo gibalne količine:

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$$

to je torej celotna gibalna količina

Poglejmo sedaj podrobneje, ali notranje sile lahko prispevajo k spremembi gibalne količine

Gibalna količina i-te točke : $\vec{G}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$

$$\frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{ki} + \vec{F}_i$$

notranje sile

Taje pomeni o gibalni količini zunanji sili na i-to točko

Sedaj to seštejem po vseh točkah

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{ki} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

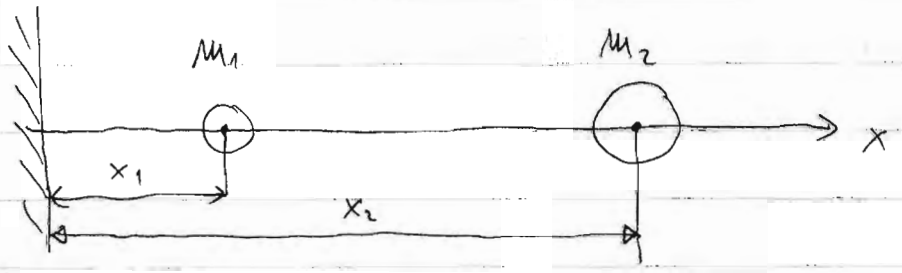
ta vsota je enaka 0, ker nastopajo sile v parih npr. $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$, zato se seštejejo.
Notranje sile ne morejo prispevati k spremembi gibalne količine

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Vidimo, da je o stališča gibalne količine gibanje togega telesa podobno gibanju točkastega telesa.
To poskušamo izraziti tako, da definiramo težišče, t.j. mesto središče telesa:

2.1.1. Težišče togega telesa

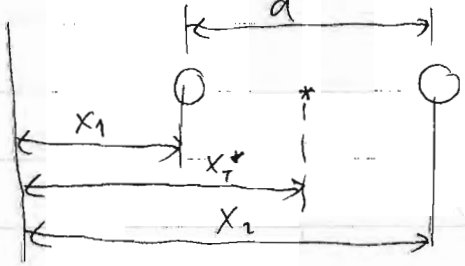
Vzemimo primer dveh teles z maso m_1 in m_2, ki sta postavljeni v razdalji x_1 in x_2 od izhodišča.
Definiram težišči dveh teles:



$$x_T^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Poglejmo, kje je težišče dveh enakih teles, ki sta v razdalji d; $m_1 = m_2 = m$

$$x_T^* = \frac{m x_1 + m(x_1 + d)}{m + m} = \frac{2mx_1 + md}{2m} = x_1 + \frac{d}{2}$$



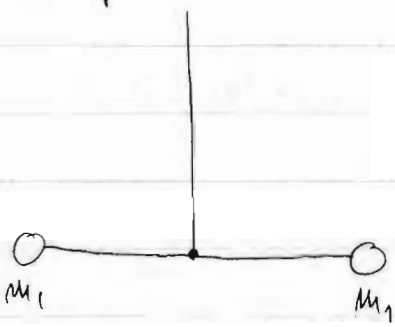
težišče je na 1/2 razdalje obeh mas, ki sta enaki.

Kaj pa, če sta masi različni? Vzemimo $m_2 = 2m_1$:

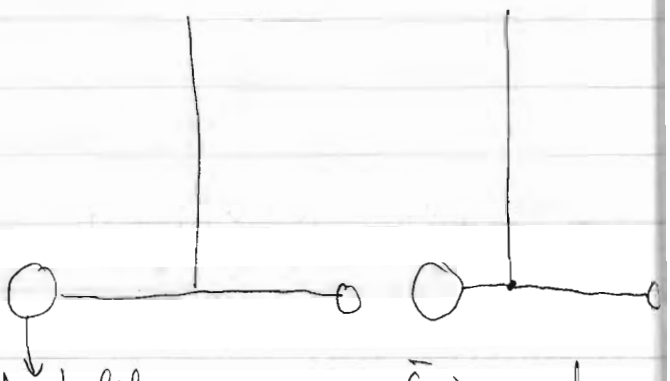
$$x_T^* = \frac{m_1 x_1 + 2m_1(x_1 + d)}{m_1 + 2m_1} = \frac{m_1 x_1 + 2m_1 x_1 + 2m_1 d}{3m_1} = x_1 + \frac{2}{3}d$$

Težišče se je premaknilo k težji masi m_2!

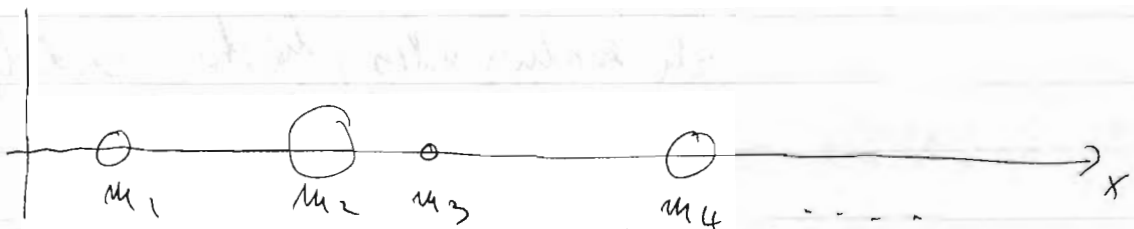
Telesni polmer:



Če sta masi enaki, potem se zadeva ne vrti, či je vrtica pripeta na sredini, torej v težišču

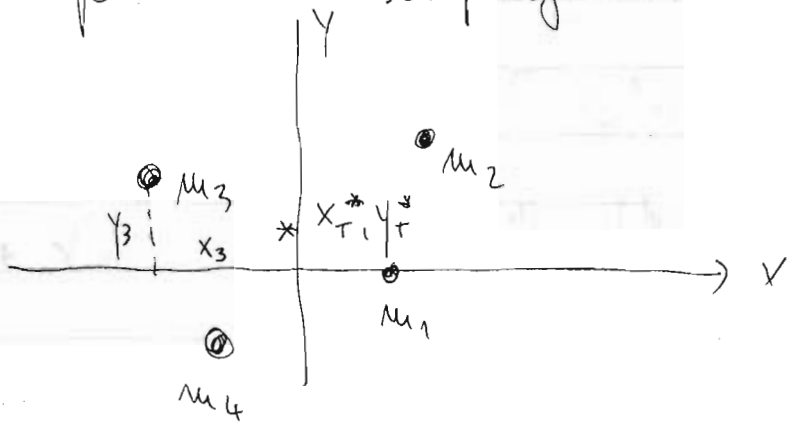


Definicijo težišča poplošimo na N mas, ki so paralelijem po osi X:



$$x_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Mase pa so lahko razporejene v x-y ravnini:



Težišče v dveh dimenzijah je določeno z vektorjem

$$\vec{r}_T^{\,*} = (X_T^*, Y_T^*)$$

$$X_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$Y_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

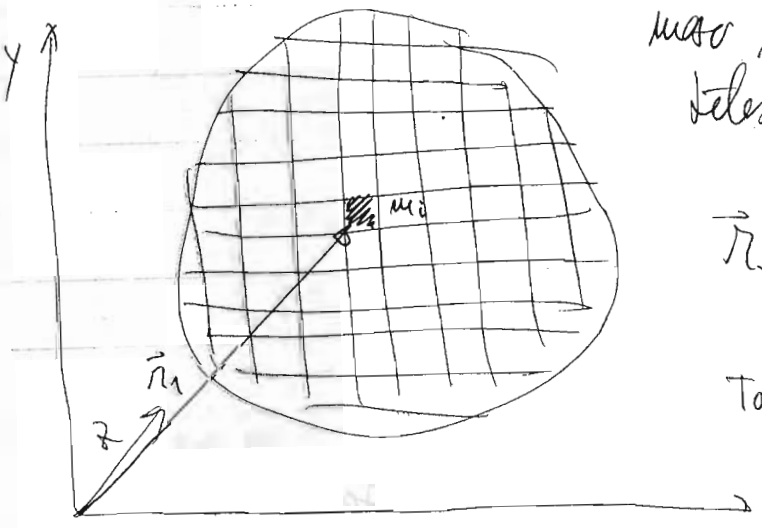
V treh dimenzijah pa dobimo še z-komponento težišča

$$\vec{r}_T^{\,*} = (x_T^*, y_T^*, z_T^*) \qquad z_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ali krajše: $\boxed{\vec{r}_T^{\,*} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$ definicija težišča

Telo v bistvu poiščemo težišče togega telesa. Telo razdelimo na zelo drobne dele z maso m_i. Težišče togega telesa je potem

$$\vec{r}_T^{\,*} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}$$



To preidemo v integral

$$\vec{r}_T^{\,*} = \frac{\int dV \vec{r}_i \rho(\vec{r})}{M}$$

Težišče je pomembno pri gibanju togih teles. Gibanje togega telesa namreč lahko razstavimo na vsoto gibanja težišča (translatorno gib) in vrtenja okoli težišča.

2.1.2. Izrek o gibanju težišča togega telesa:

Izhajam iz definicije težišča, vzamem samo

$$\vec{r}_T^{\,*} = (x_T^*, y_T^*, z_T^*) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

M skupna masa telesa

Sprememba $\frac{\Delta \vec{r}_T^{\,*}}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}}{M}$ če so mase po velikosti konstantne.

To pa je hitrost težišča:

$$\vec{v}_T^{\,*} = \frac{\Delta \vec{r}_T^{\,*}}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i}{M}$$

Poglejmo spremembo hitrosti v časovni enoti:

$$\frac{\Delta \vec{v}_T^{\,*}}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}}{M}$$

To pa je pospešek težišča $\vec{a}_T^{\,*} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M}$ / · M

$$M \cdot \vec{a}_T^{\,*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{ZUN}$$

$\vec{F}_i$ sila na i-to tel

Dobimo zakon o gibanju težišča $\boxed{M \cdot \vec{a}_T^{\,*} = \vec{F}_{ZUN}}$

Togo telo se giblje tako, kot da bi bila vsa njegova masa zbrana v težišču telesa.

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = m_t \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t}$$

uvedemo pojem hitrosti težišča $\vec{v}^*$

m_t .... skupna masa telesa

Torej

$$m_t \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \vec{v}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i = \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \frac{\Delta \vec{r}^*}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t} \qquad \vec{r}_i \text{ ... koordinata } i\text{-te točke}$$

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \vec{r}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\boxed{\vec{r}^* = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}$$

Tako se izračuna težišče telesa

To je seveda treba računati po koordinatah!

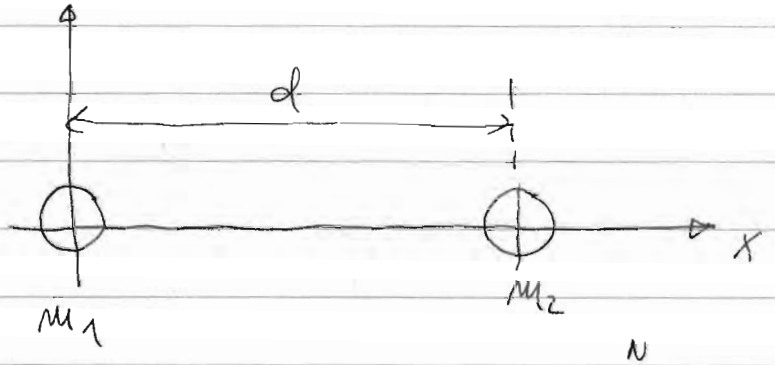
Primer izračuna težišča: dve telesi z masama po 7 kg in 4 kg sta med seboj povezani z zelo lahko palico v razmiku 1,5 m. V kateri točki je težišče?

$m_1 = 7\,kg$

$m_2 = 4\,kg$

$d = 1{,}5\,m$

$x^* = ?$



$$x^* = \frac{1}{m_t} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^* \quad \text{to pride iz} \quad \vec{r}^* = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^*$$

$m_t = \sum_i m_i$ masa telesa

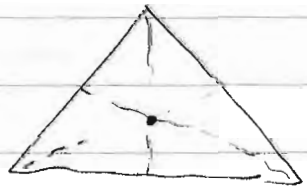
$$x^* = \frac{1}{m_1+m_2} \cdot \sum_{i=1}^{2} m_i \cdot x_i = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot d\right) = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot d =$$

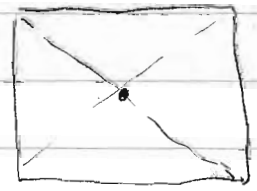
$$= \frac{4}{11} \cdot 1{,}5\,m = \underline{0{,}54\,m}$$

Težišče telesa je v razdalji 0,54 m od težišča telesa

Primeri težišč geometrijskih teles:

trikotnik:





pravokotnik

Slovenija

2.1.2. Izrek o gibanju težišča togega telesa

Ugotovili smo, da je za sistem z N točkami gibalna količina

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}^*$$

m_i .... masa i-te točke
$\vec{v}_i$ .... hitrost i-te točke

Prav tako smo ugotovili, da se sistem mnogih točk pod vplivom zunanjih sil giblje tako, kot da bi bila to točkasto telo, postavljeno v težišče sistema:

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i = M \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t}$$

M .... masa telesa (vsota vseh mas v sistemu delcev)
$\vec{v}^*$ .... hitrost težišča

To pa je že izrek o gibanju težišča:

težišče telesa se pod vplivom zunanjih sil giblje kot točkasto telo, v katerem bi bila zbrana vsa masa telesa in na katerega deluje vsota vseh zunanjih sil. To pomeni, da se težišče telesa giblje s pospeškom, ki je sorazmeren z vsoto vseh zunanjih sil!

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{G} = M \cdot \Delta \vec{v}^* \rightarrow \boxed{\vec{F} = M \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t} = M \cdot \vec{a}^*}$$

2. Newtonov zakon torej velja tudi za gibanje težišča togega telesa.

Posledice izreka o gibanju težišča togega telesa:

1. Izrek o gibalni količini togega telesa: sunek zunanjih sil je enak spremembi gibalne količine težišča togega telesa:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}^{+}$$

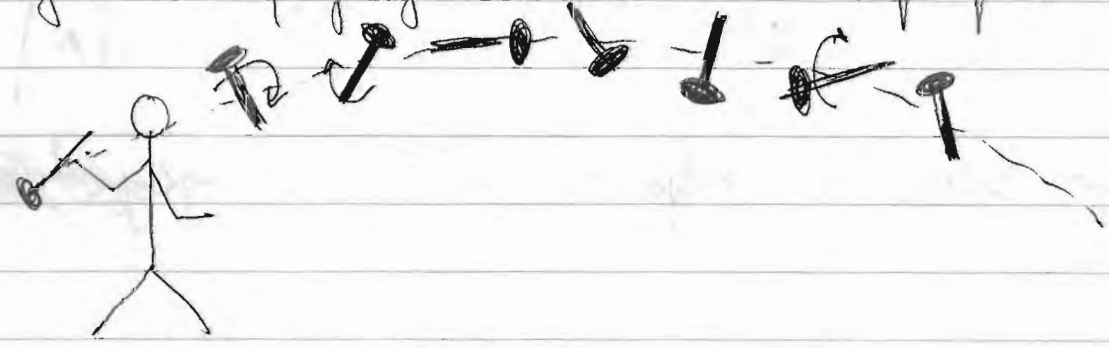
2. Izrek o potencialni energiji togega telesa:
Delo zunanjih sil razen sile teže je enako spremembi kinetične ~~in potencialne~~ energije telesa in potencialne energije težišča togega telesa

$$A_{\text{ostale sile}} = W_k - W_k' + W_p - W_p'$$

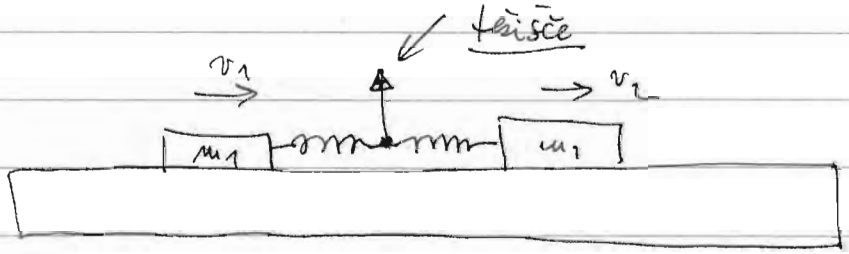
Potencialna energija togega telesa: $W_p = m \cdot g \cdot h^{+}$

h^{+} .... višina težišča tel

Primer 1: met togega palice s krogla na eni strani. Palico vržem tako, da se vrti v zraku. Opazim se vidi, da se težišče, ki je označeno, giblje kot točkasto telo → po parabeli:

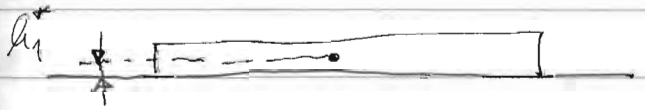


Primer 2: Dva vozička na zračni klopi sta opeta z dvema vzmetema. Med njima je kazalec, ki kaže gibanje skupnega težišča. Ko vozičke sunemo, da se oba premakneta. Vozička med seboj miličata, vidi pa se da težišče potuje z enakomerno hitrostjo.

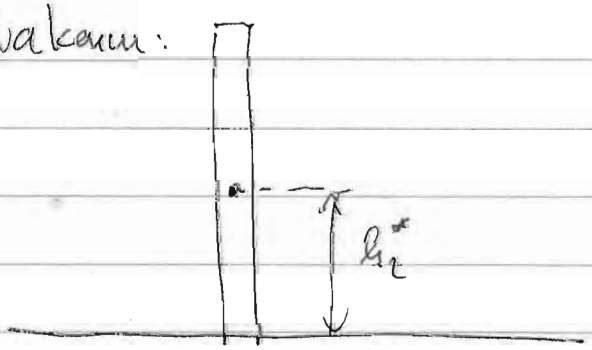


Primer 3: Kolikšno delo opravimo, če enakomerno debel drog s premerom 20 cm, maso 200 kg in dolžino 8 m postavimo iz vodoravne v navpično lego?

Na začetku:



Na koncu:



$$A = W_p - W_p' = m \cdot g \cdot (h_2^* - h_1^*) = 200\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2\,(4\,m - 0.1\,m) =$$

$$= \underline{\underline{7644\,J}}$$

2.2. Vrtenje togega telesa

2.2.1. Enakomerno pospešeno kroženje t.t.

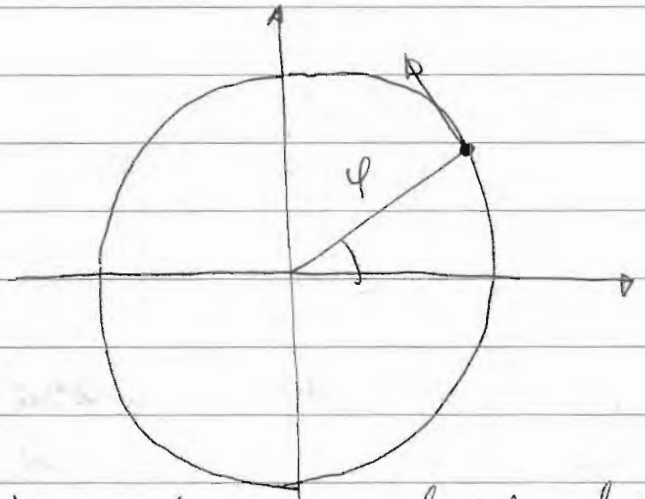
Imejmo točkasto telo z maso m, ki kroži v stalni razdalji r od središča kroženja. Kroženje je enakomerno pospešeno, če se kotna hitrost ω ~~pre~~ povečuje premo sorazmerno s časom:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \omega' + \alpha \cdot t \\ \alpha &= \frac{\omega - \omega'}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \end{aligned}}$$

ω'.... začetna kotna hitrost

α.... kotni pospešek

[1/s²] enota za kotni pospešek

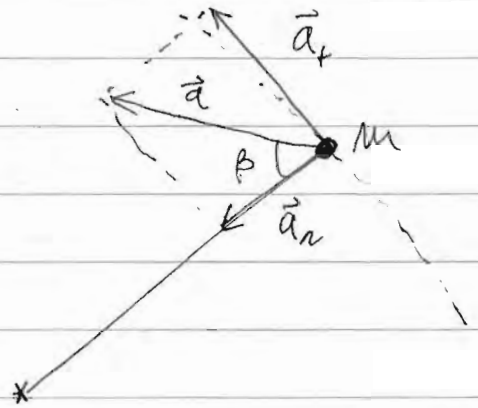


Kaj se dogaja s krožilno hitrostjo pri enakomerno pospešenem kroženju?

$$\boxed{v = \omega \cdot r = \omega' \cdot r + \alpha \cdot r \cdot t = v' + a_t \cdot t} \qquad \boxed{a_t = \alpha \cdot r}$$

tangentni pospešek

Pri enakomerno pospešenem krožnem g.t. imamo torej dva pospeška: radialni in tangentni, ki sta oba vektorja in se zato seštevata v skupni vektor pospeška:



Velja: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

Velikost celotnega pospeška:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_r|^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2 r^2 + (r\omega^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 r^2 + r^2 \omega^4}$$

Primer: točkasto telo z maso 0,5 kg kroži po krožnici z radijem 1 m z enakomerno kotno hitrostjo, tako da opravi en obhod v 2 s. V nekem trenutku začne enakomerno pospeševati s pospeškom $3\,/s^2$. Izračunaj velikost in smer celotnega pospeška ob v trenutku začetka pospeševanja!

$m = 0,5\,kg$

$r = 1\,m$

$t_0 = 2\,s \Rightarrow$ opravi kot $2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = 3,14/s$

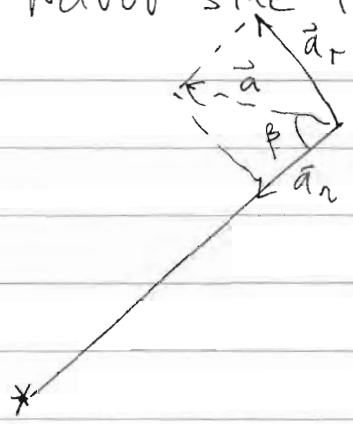
$\alpha = 3/s^2$

$|\vec{a}| = ?$

$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2 r^2 + r^2 \omega_0^4} = 10,3\,m/s^2$

$\sphericalangle\beta = ?$

2.2.2. Navor sile in vztrajnostni moment

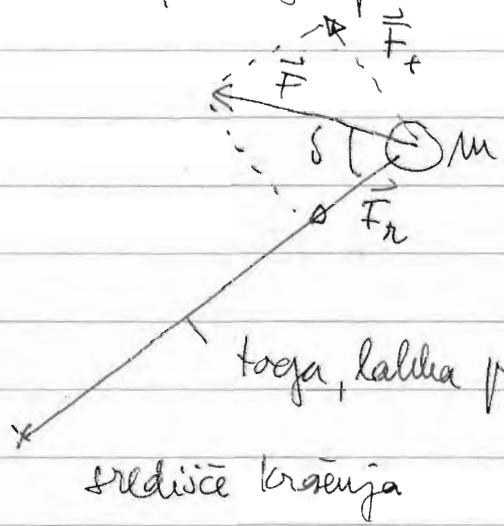


$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_r}{a_t} = \frac{r\cdot\omega^2}{r\cdot\alpha} = \frac{\omega^2}{\alpha} = 3{,}28$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\, 3{,}28 = \underline{\underline{73°}}$$

Sedaj smo spoznali opis gibanja, nismo pa povedali zakaj togo telo kroži enakomerno pospešeno.

Vzemimo zopet telo z maso m, ki kroži v stalni razdalji r, ki je ni mogoče spremijati (togo). Na telo naj deluje zunanja sila $\vec{F}$, kot je prikazano na spodnji sliki:



Zunanja sila naj deluje pod kotom δ glede na zveznico s središčem krožanja. To silo razstavimo na radialno in tangentno ali komponento:

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_r$$

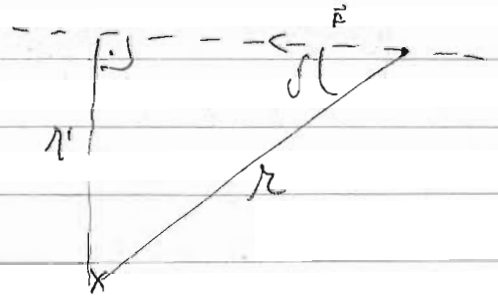
Radialna sila $\vec{F}_r$, ki ima smer proti središču krožnja nima vpliva na gibanja telesa, saj se razdalja ne more spremeniti. Kaj pa tangentna komponenta $\vec{F}_t$? Ta komponenta sile povečuje tangentno komponento hitrosti.

$$F_t = F \cdot \sin\delta = m \cdot a_t = m \cdot \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = m \cdot r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = m \cdot r \cdot \alpha$$

$$F \cdot \sin\delta = m \cdot r \cdot \alpha \qquad / \cdot r$$

$$F \cdot r \cdot \sin\delta = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Poglejmo, kaj pomeni $r \cdot \sin\delta$



$$\sin\delta = \frac{r'}{r} \Rightarrow$$

$$r' = r \cdot \sin\delta$$

$r' = r \cdot \sin\delta$ imenujemo ročica sile. To je oddaljenost premice, v kateri leže deluje sila $\vec{F}$, od središča krožnja.
Enačbo sedaj zapišemo

$$F \cdot r' = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Definirajmo: navor sile glede na dano os

$$M = F \cdot r'$$

Navor je produkt sile in njene ročice glede na to os

Definiramo: vztrajnostni moment točkastega telesa

$$J = m \cdot r^2$$

Vztrajnostni moment točkastega telesa je enak produktu mase telesa in kvadrata radija krožnja (razdalje od osi).

Enakomerno pospešeno krožnje pod vplivom stalnega navora sile torej zapišemo z navorom sile, vztrajnostnim momentom in kotnim pospeškom:

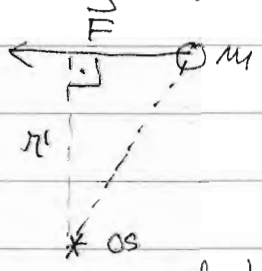
$$M = J \cdot \alpha$$

Navor zunanje sile je enak produktu vztrajnostnega momenta in kotnega pospeška. Izraz velja splošno, ne samo za točkasto telo. Za druga telesa je potrebno vztrajnostne momente izračunati.
Če je navor konstanten, se telo začne vrteti enakomerno pospešeno

Za togo telo smo izpeljali zvezo med navorom zunanje sile in kotnim pospeškom

$$M = J \cdot \alpha$$

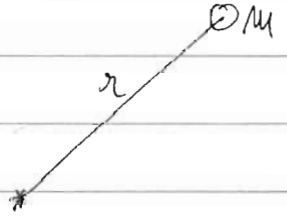
Pri tem je M navor zunanje sile:



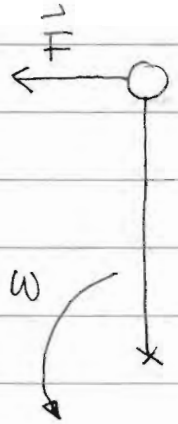
$$M = F \cdot r'$$

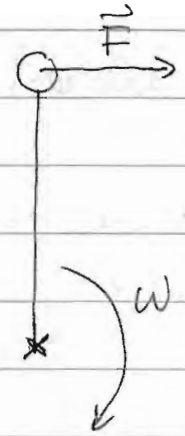
J je vztrajnostni moment togega telesa

$$J = M \cdot r^2$$



Pod vplivom stalnega navora se togo telo torej vrtiloma stalno oz. enakomerno pospešeno. Posledica je to, da navor vrti telo bodisi v smeri urinega kazalca ali pa v nasprotni smeri. Ločiti moramo torej smer vrtenja navora, tako da se dogovorimo, katera smer je pozitivna in katera negativna.



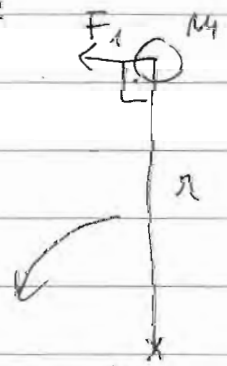


nasprotno smeri urinega kazalca

smer urinega kazala

Pomembno je to, da se navori seštevajo. Če imam naprimer 2 sili ki vrtita telo, se njina navora seštejeta. Pri seštevanju upošto sučnost navora, tako da enega štejem pozitivno, drugega negati

Dogovor:



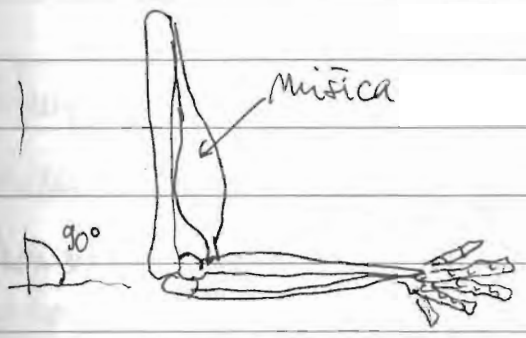
negativen navor

pozitiven navor

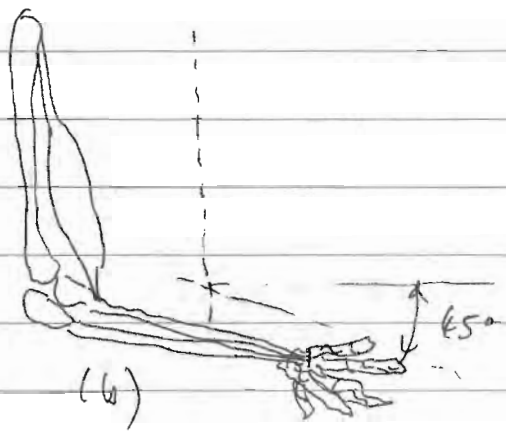
$M = + F_1 \cdot r$

$M = - F_2 \cdot r$

Primer 1: Izračunaj navor na mišico ~~na~~ človeške roke, ki potiska s silo 700N, njeno prijemališče pa je 5cm od sklepa. V prvem primeru je ročica sile pravokotna, v drugem primeru pa pod kotom 45°, kot je prikazano na sliki

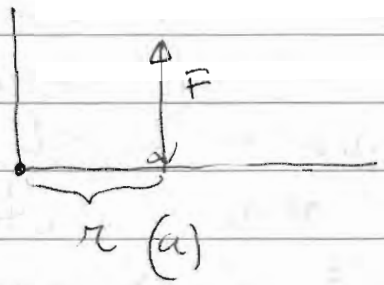


(a)



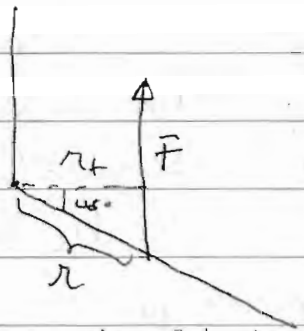
(b)

Poglejmo kako bi to narisali drugače



(a)

pravi kot



$\cos 45° = \frac{r_\perp}{r}$

$r_\perp = r \cdot \cos 45°$

(b)

poševni kot

$r = 0{,}05\,m$
$F = 700\,N$

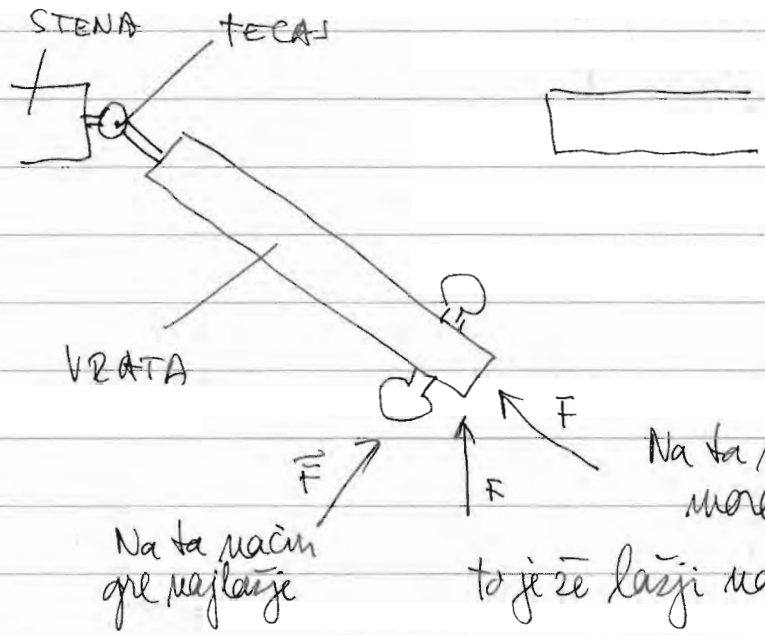
$M_a, M_b = ?$

a) $M = r_\perp F = 700N \cdot 0{,}05m = 35\,N \cdot m$

b) $M = r_\perp F = r \cdot F \cdot \cos 45° =$
$= 35\,Nm \cdot \cos 45° = 24{,}7\,Nm$

V primeru (b) je torej navor manjši!

Pojem novora lahko enostavno vidimo na vratih: če poskušamo vrata zapreti s silo, je vašno, kak je sila usmerjena



Na ta način ne moremo zapreti vrat (se ne vrtijo)

Primer 2: Dva tanka valja sta med seboj pritrjena tako, da njuni geometrijski osi sovpadata. Premer povega valja je 60 cm, premer drugega valja pa 100 cm. Na obodu večjega valja prijemlje sila $F_1 = 50N$ pod kotom 30° glede na tangento. Na obodu manjšega valja prijemlje sila $F_2 = 50N$ glede v smeri tangente in sicer tako, da poskuša vrteti valj v obratni smeri kot sila F_1. Kolikšen je skupni novor obeh sil in v katero smer se valja vrtita?

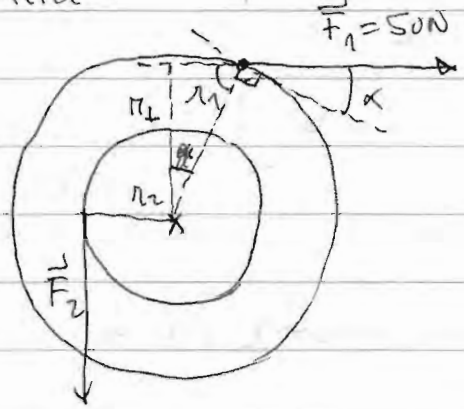
$2r_1 = 100\,cm$

$2r_2 = 60\,cm$

$F_1 = F_2 = 50N$

$\alpha = 30°$

$M = ?$



Navor sile F_1: $M_1 = F_1 \cdot r_{\perp} = F_1 \cdot r_1 \cdot \sin 60°$

$M_2 = -F_2 \cdot r_2$

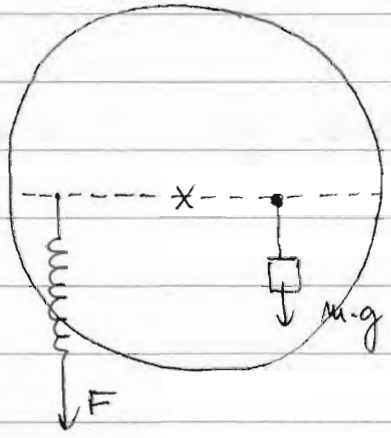
$M = M_1 + M_2 = F_1 r_1 \sin\alpha - F_2 r_2 = 50N \cdot 0{,}5m \cdot \sin 60° - 50N \cdot 0{,}3m$

$= 21{,}6Nm - 15Nm = +6{,}6\,Nm$

Slupen navor je pozitiven, valji se ~~kolo~~ vrtita v smeri urinega kazalca.

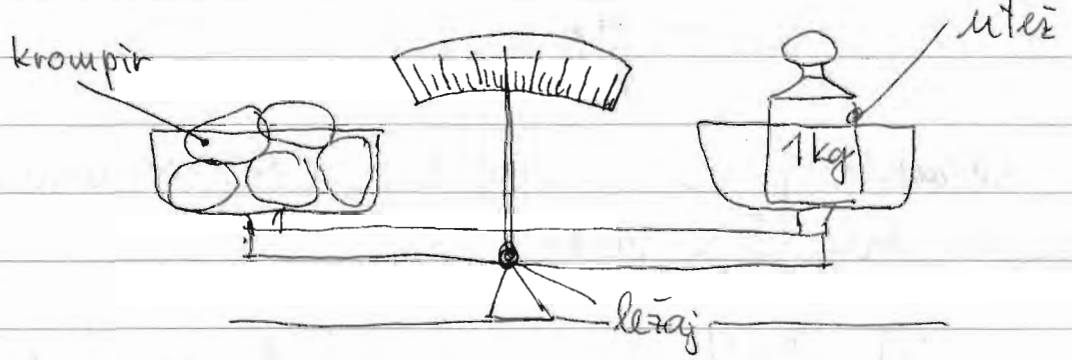
Kako merimo navore?

(a)

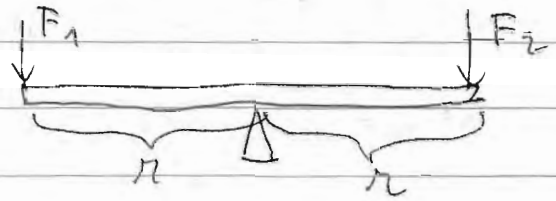


Imamo ravnovesje navorov: navor mase uravnovešimo z vzmetno tehtnico, ki pojemlji v vzmeti razdalji

(b) Navadna tehtnica



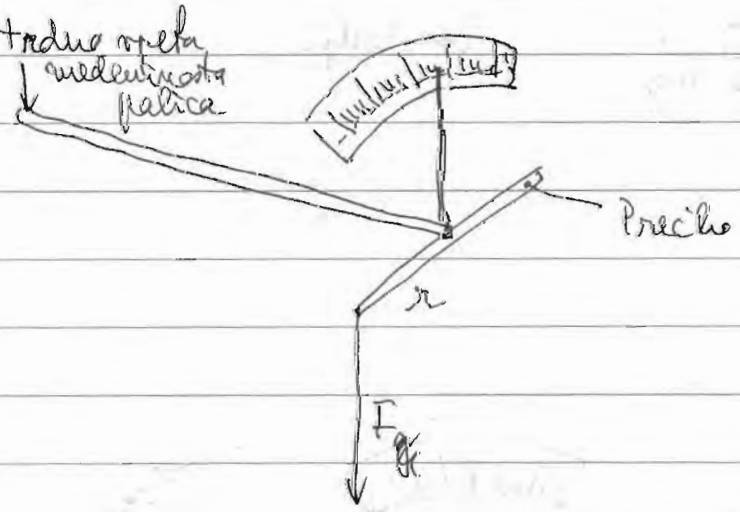
Tukaj uravnovesimo dva navora zunanjih sil: sila teže uteži in sila teže vezneme mase



Skupni navor $-F_1 \cdot r_1 + F_2 r = 0 \quad r(F_2 - F_1) = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

Tehtnica je uravnovešena, ko sta oba navora po velikosti enaka, po predznaku pa različna.

(c) torzijska tehtnica: zvijamo nitko ali pa kovinski drog



Merimo zasuk prostega konca palice. Le-ta je sorazmeren z navorom sile F. Velja

$$M = D \cdot \varphi$$

φ .... kot zasuka tehtnice

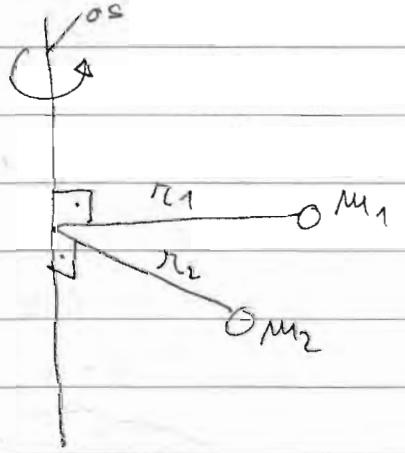
D ..... torzijski koeficient žice ali palice

Poglejmo si sedaj, kako izračunamo vztrajnostne momente togih teles:

Definicija: vztrajnostni moment togega telesa vedno navajamo (izračunamo) za določeno os. Če se os spremeni, se tem vsekakor spremeni vztrajnostni moment telesa.

Vztrajnostni moment togega telesa izračunamo tako, da telo razdelimo na zelo drobne delce, katerih lahko vsakega za točkasto telo, potem pa seštejemo vztrajnostne momente vseh delčkov. To si bomo najlažje pogledali na primeru.

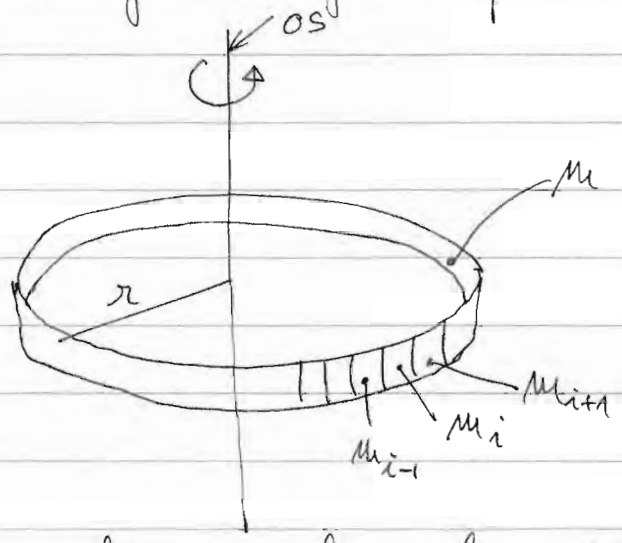
Primer 1: vztrajnostni moment dveh točkastih teles z masama m_1 in m_2 v razdaljah od osi r_1 in r_2



$$J = J_1 + J_2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Pazi: vztrajnostni moment je tem večji, čim večja je razdalja mase od osi

Primer 2: Izračunaj vztrajnostni moment zelo tankega obroča z m in polmerom r glede na geometrijsko os obroča!



Obroč razdelimo na zelo majhne dele z maso m_i. Oddaljenost od osi obroča je za vse te delce enaka r. Skupni vztrajnostni moment je torej:

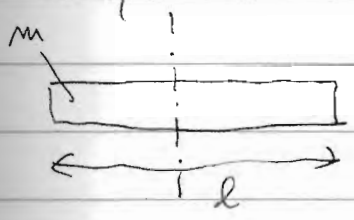
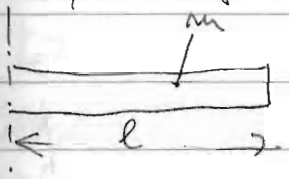
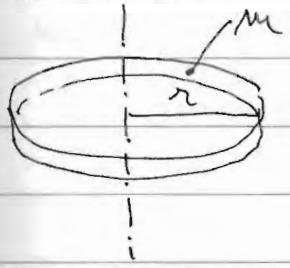
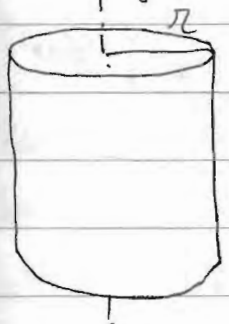
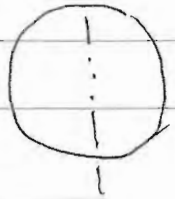
$$J = m_1 r^2 + m_2 r^2 + \ldots + m_i r^2 + \ldots + m_N r^2 =$$

$$= r^2 (m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots + m_N) = r^2 \cdot m$$

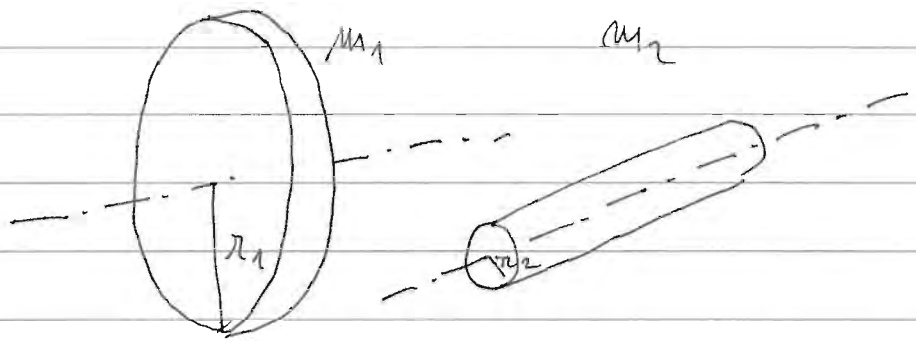
$$\boxed{J = m \cdot r^2}$$

To je vztrajnostni moment obroča z maso m in radijem r, glede na geometrijsko os. Zanimivo, da je vztrajnostni moment enak vztrajnostnemu momentu točkastega telesa!

Primeri vztrajnostnih momentov različnih geom. teles

Telo	J
Palica, os v središču 	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
Palica, os v krajišču 	$J = \frac{1}{3} m l^2$
Tanki obroč 	$J = m \cdot r^2$
Valj, krogla 	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
Krogla 	$J = \frac{2}{5} m r^2$

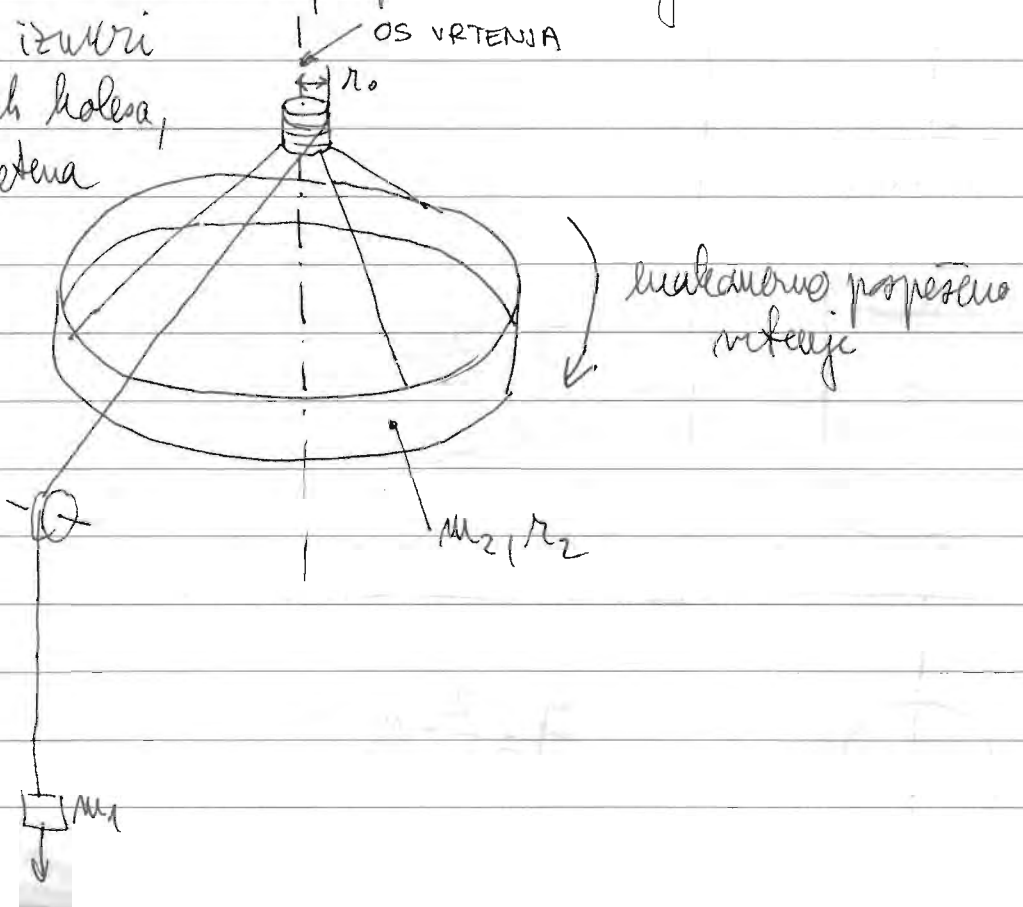
Pomembno je tole: če vzamemo dva valja, ki sta enako težka, pa različnih premerov, potem ima večji valj večji vztrajnostni moment kot pa manjši



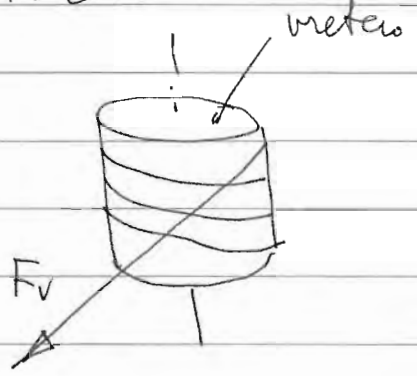
Kljub temu da je $m_1 = m_2$, je $J_1 > J_2$. Zato, ker je pri večjem valju masa razporejena na večjih razdaljah od osi, kot pri manjšem valju! To je pomembno

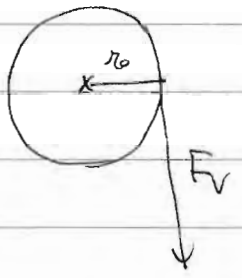
Primer 3: Enakomerno pospešeno vrtenje kolesa

Izračunaj in izmeri kotni pospešek kolesa, ki je preko vretena in škripca povezano z utežjo.



Preko vrvice deluje sila teže mase m_1. Ta sila vrvice povzroči navor na vretenu.





$M_V = F_V \cdot r_0$

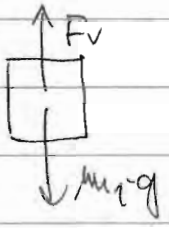
To je navor sile vrvice

Preko tega navora na vretenu se začne enakomerno pospešeno vrteti celoten veliki okroč. Poglejmo ali lahko izračunamo kotni pospešek?

Pogledam gibanje posameznih delov tega sistema

a) masa uteži m_1:

2. Newtonov zakon



$$m_1 \cdot g - F_V = m_1 \cdot a$$

$$\hookrightarrow F_V = m_1 (g - a)$$

b) Na kolo deluje preko vretena navor $M = F_V \cdot r_0$. Ta navor povzroči enakomerno pospešeno vrtenje kolesa

$$M = J \cdot \alpha$$

J ... vztrajnostni moment vrtečega kolesa

$$F_V \cdot r_0 = J \cdot \alpha$$

α ... kotni pospešek

Iz tega izračunam

$$F_v \cdot r_0 = m_1(g-a)r_0 = J \cdot \alpha$$

Velja še $a_T = \alpha \cdot r_0 = a$

$$m_1(g-a)r_0 = m_1 g r_0 - m_1 \cdot \alpha \cdot r_0^2 = J \cdot \alpha$$

$$m_1 \cdot g \cdot r_0 = J \cdot \alpha + m_1 r_0^2 \cdot \alpha = \alpha(J + m_1 r_0^2)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m_1 g \cdot r_0}{J + m_1 r_0^2}}$$

To izračunam $J = MR^2$ in dobim $\alpha = \ldots$

Kako pa to izmerim? Spočetka kolo miruje, torej $\omega = 0$, nato pa začne ω naraščati s časom

$$\alpha = \frac{\omega}{t}$$

Če merim t in ω ob tem času lahko izračunam kotni pospešek.

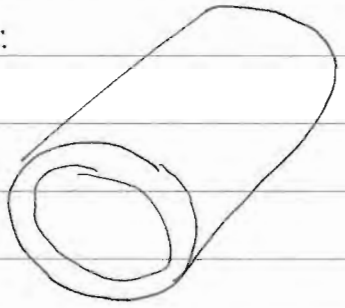
t merim takole: štopam, koliko časa utež pospešuje kolo. To tem času bo kotna hitrost kolesa konstantna, zato jo lahko izmerim posebej, tako da štopam čas za en ali več obhodov

$$\alpha = \frac{\omega}{t_0}$$ t_0 določim

$$\omega = \frac{2\pi}{t_1}$$ $2\pi \rightarrow$ kot pri enem obhodu; $t_1 \rightarrow$ čas za 1 obhod

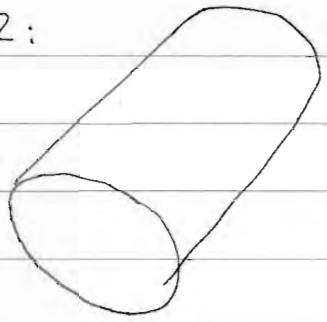
Primer 4: Dva enaka težka valja z enakima premerama postavimo na klanec. Eden od valjev je iz homogenega materiala, drugi pa je na sredini votel. Valja opustimo. Kateri valj se bo gibal hitreje?

Valj 1:



votel

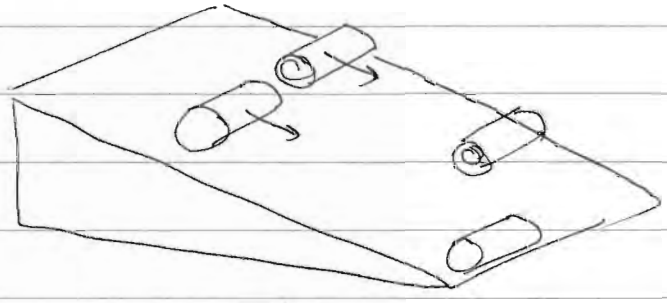
Valj 2:



polni

Oba valja imata enaki masi (polni je iz plastike, votli pa iz kovine).

Kot



Votli valj zaostaja. Zakaj?

Poglejmo za kakšno gibanje gre:

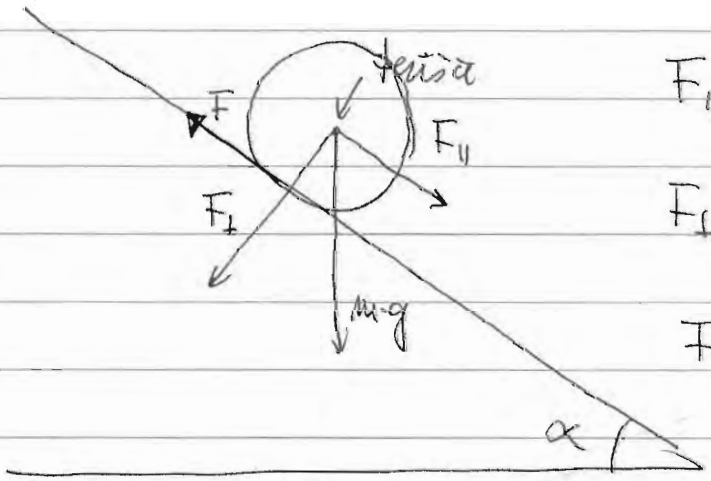
1. V obeh primerih je sila, ki giblje valje vzporedna komponenta sile teže na klanec.
2. Za oba valja sta enaki → torej bi moral biti pospešek težišča enak → to je res, če valja zdrsujeta, ne vrtita.
3. Kar je različno, sta vztrajnostna momenta: votli valj

Imam praktično vso mazo zbrano na polmeru, zato ima veliko večji vztrajnostni moment od polnega valja z enako mazo in radijem.

Gre za dvoje vrst gibanj:

- gibanje težišča
- vrtenje valja okoli težiščne osi

Poglejmo si odaj obe vrsti gibanj posebej:



$F_{\parallel}$ ... paralelna komponenta sile teže

$F_{\perp}$ ... pravokotna komp. sile teže

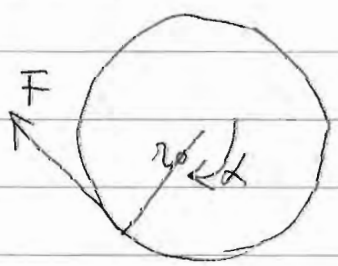
F ... sila, s katero podlaga vrti valj

Valj se kotali, zato je $F < F_{tr}$!

a) gibanje težišča valja: $F_{\parallel} - F = m \cdot a^*$ $\quad a^*$ ... pospešek težišča valja

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - F = m \cdot a^*$$

b) Vrtenje okoli težiščne osi:



α ... kotni pospešek

$M = J \cdot \alpha$

$F \cdot r_0 = J \cdot \alpha$

(c) Ker se valj kotali, velja $v^* = v_{obod} = r_0 \cdot \omega$

pospešek težišča $a^* = \frac{\Delta v^*}{\Delta t} = r_0 \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r_0 \cdot \alpha$

je kar enak tangentnemu pospešku!

imam torej 3 enačbe:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot g \cdot \sin\alpha - F &= m \cdot a^* \\ F \cdot r_0 &= J \cdot \alpha \\ a^* &= r_0 \cdot \alpha \end{aligned}\right\}$$

Neznanke so F, α in a^*, torej tudi 3, zato je sistem enačb rešljiv. Kako pa izračunam a^*? Znebit se moram F in α

$F \cdot r_0 = J \cdot \frac{a^*}{r_0}$, to vstavim v 1. enačbo

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - J\frac{a^*}{r_0^2} = m \cdot a^*$$

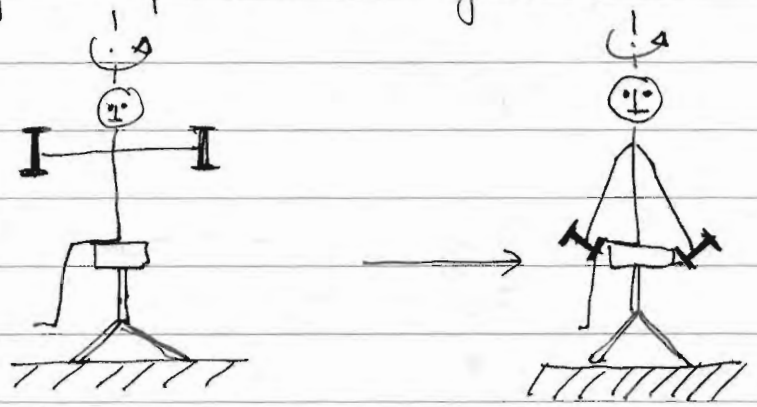
$$m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a^* + \frac{J}{r_0^2} a^* = a^*\left(m + \frac{J}{r_0^2}\right)$$

$$\boxed{a^* = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{m + \frac{J}{r_0^2}}}$$

Sedaj pa poglejmo razliko med obema valjema. Masi in polmera sta enaka, pač pa je J votlega valja večji. Ker je to v imenovalcu, bo zato pospešek težišča votlega valja manjši. Zato gre tudi počasneje po strmini.

2.3. Izrek o vrtilni količini

Poglejmo si poskus na vrtljivem stolu



mož s stolom se vrti s kotno hitrostjo ω_1

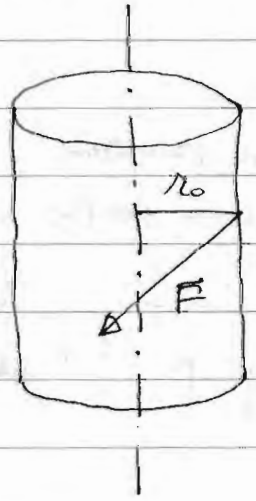
ω_1

mož se začne hitreje vrteti

ω_2

Ugotovimo $\omega_2 > \omega_1$. Vprašamo se zakaj je tako, ali da pojav lahko na kakšen način razložim?

Poglejmo si vrtenje togega telesa, naprimer vrtenje valja okoli njegove geometrijske osi, ki je nepremična. Imejmo še zunanji navor M sile F:



Navor sile je

$M = F \cdot r_0$

Velja: $M = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ / $\cdot \Delta t$

$M \cdot \Delta t = J \cdot \Delta\omega = J(\omega - \omega')$

ω .... končna hitrost

ω' .... začetna kotna hitrost

$M \cdot \Delta t$ ... sunek navora zunanjih sil

Definiram vrtilno količino togega telesa, ki se vrti okoli nepremične osi:

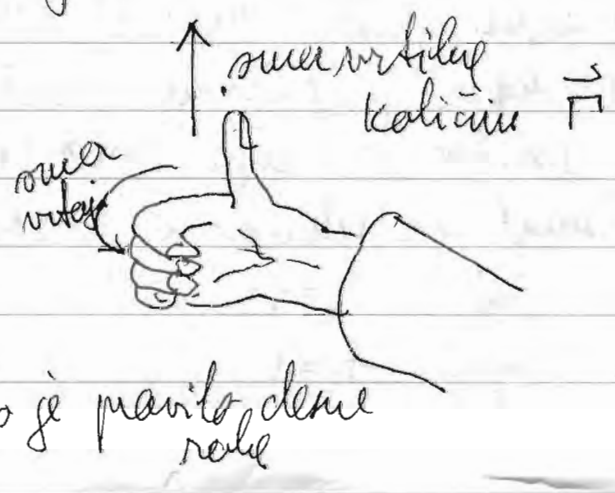
$$\Gamma = J \cdot \omega$$

Tako da smeh sile lahko zapišem kot:

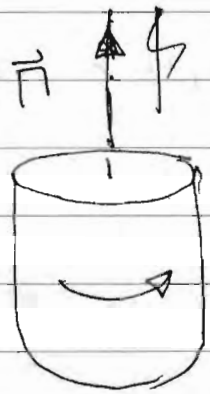
$$M \cdot \Delta t = \Gamma - \Gamma'$$

To enačbo imenujemo izrek o sunku vrtilne količine, ki pravi: sunek zunanjih navorov glede na nepremično os je enak spremembi komponente vrtilne količine v smeri nepremične osi

Vrtilna količina ima vektorski značaj, saj se telo lahko vrti v levo ali v desno smer. Vrtilna količina $\Gamma = J \cdot \omega$ je torej lahko pozitivna ali pa negativna (ker ω lahko kaže v levo ali desno)
Kako si predstavljamo smer vrtilne količine?
Za to uporabimo dlančno pravilo, ki ga najlažje opazimo na primeru valja, ki se vrti okoli fiksične osi:



To je pravilo desne roke



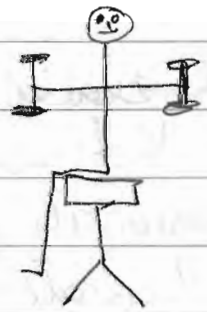
valj se vrti v desno

Valj se vrti v levo

Če se smer vrtenja obrne, se spremeni smer vrtilne količine

Ali je mogoče s tem zakonom pojasniti spremembo kotne hitrosti?

Primer 1:



(a)

(b)

Mož sedi na vrtljivem stolu in drži v rokah enaki uteži. Celotni vztrajnostni moment stola, moža in uteži v odročenju je 10 kg m², v priročenju pa 2,5 kg m². Na začetku imra mož roki v odročenju in se zavrti vsako sekundo enkrat. Kolikokrat na sekundo se zavrti v priročenju?

$J_1 = 10\ kg\,m^2$ $\quad t_1 = 1\,s$

$J_2 = 2{,}5\ kg\,m^2$ $\quad t_2 = ?$

$$M \cdot \Delta t = \Gamma - \Gamma' = J_2 \cdot \omega_2 - J_1 \omega_1 = 0$$

Ker ni zunanjih navorov, se komponenta vrtilne količine ohranja:

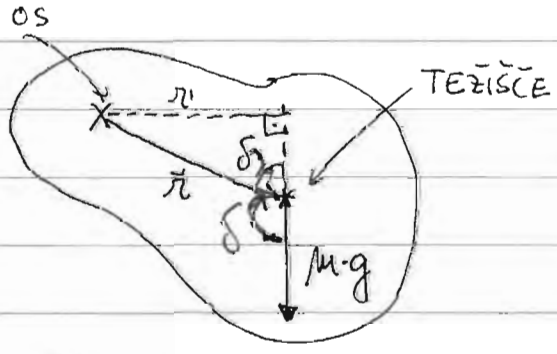
$$J_2 \cdot \omega_2 - J_1 \omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{J_1}{J_2} = \frac{2\pi}{t_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{t_2} = \frac{2\pi}{t_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} \Rightarrow \boxed{t_2 = t_1 \cdot \frac{J_2}{J_1}}$$

$$t_2 = 1s \cdot \frac{2{,}5 kg m^2}{10 kg m^2} = 0{,}25 s$$ Vsako sekundo se zavrti 4x

2.3.1 Navor sile teže, statika togega telesa

Poglejmo si <u>navor sile teže</u>: pokazali smo da sila teže prijemlje v težišču telesa. Poglejmo si, kako je z navorom sile teže, če se telo lahko vrti okoli osi:

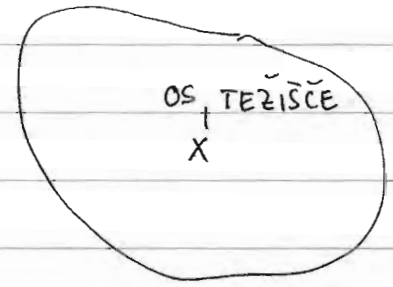


r'.... ročica sile
r.... razdalja osi od težišča telesa

Navor sile teže je: $\boxed{M_g = m \cdot g \cdot r' = m \cdot g \cdot r \cdot \sin\delta}$

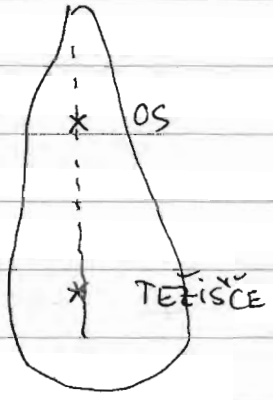
Kdaj je ta navor enak nič? Dve možnosti sta

- os vrtenja je pertaulejna v težišče
- os vrtenja leži na navpični premici skozi težišče



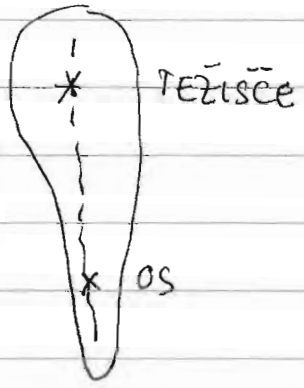
(a)

ročica sile je enaka 0!



(b)

to je stabilna lega



(c)

tomi stabilna le

Na ta način lahko določimo lego težišča → telo obesimo in polec navpičnico skozi os. To naredimo za več različnih osi in iz presečišča premic določimo lego težišča.

Statika togega telesa:

Ugotovili smo, da težišče togega telesa miruje ali se giblje premo enakomerno, če je vsota vseh sil na to telo enaka nič. Vendar nismo povedali še nič česar o vrtenju telesa. Zato dodajmo:

Telo miruje ali se giblje premo enakomerno ali se enakomerno vrti, če je vsota vseh zunanjih sil enaka nič in če je vsota vseh zunanjih navorov enaka nič.

Ravnovesje: $\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{a}^* = 0$ $\vec{a}^*$ ... pospešek težišča

(vsota vseh sil)

$\sum_i M_i = 0 \rightarrow \alpha^* = 0$ α^* ... kotni pospešek glede na os skozi težišče.

Primer 1: Homogena deska dolžine 4m in mase 20kg je podprta na 1/3 svoje dolžine, tako, da se lahko prosto vrti okoli podporne točke. Na kateri strani in v kakšni razdalji od osi mora stati otrok z maso 25kg, da deska miruje v vodoravnem položaju? S kolikšno silo pritiska deska na podporno točko?

$m_1 = 20\,kg$

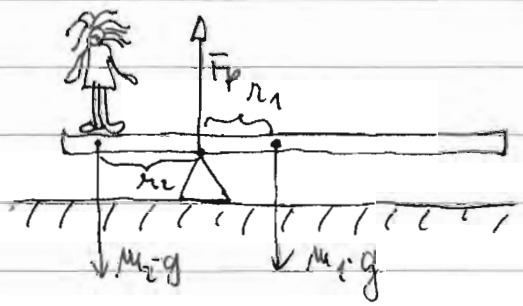
$l = 4\,m$

$l_1 = 1/3\,l$

$m_2 = 25\,kg$

$r_2 = ?$

$F = ?$



$r_1 = \frac{l}{2} - l_1 = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{3-2}{6} l = \frac{l}{6}$

Pogoj za ravnovesje: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ in $\sum_i \vec{M}_i = 0$

Kakšne sile deluje na desko? Sile teže deske, sila podlage in sila fiše otroka.

(a) Ravnovesje sil: $-m_2 \cdot g - m_1 \cdot g + F_p = 0$

$$\boxed{F_p = (m_1 + m_2) g}$$

$$F_p = 45\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 = \underline{\underline{441\,N}}$$

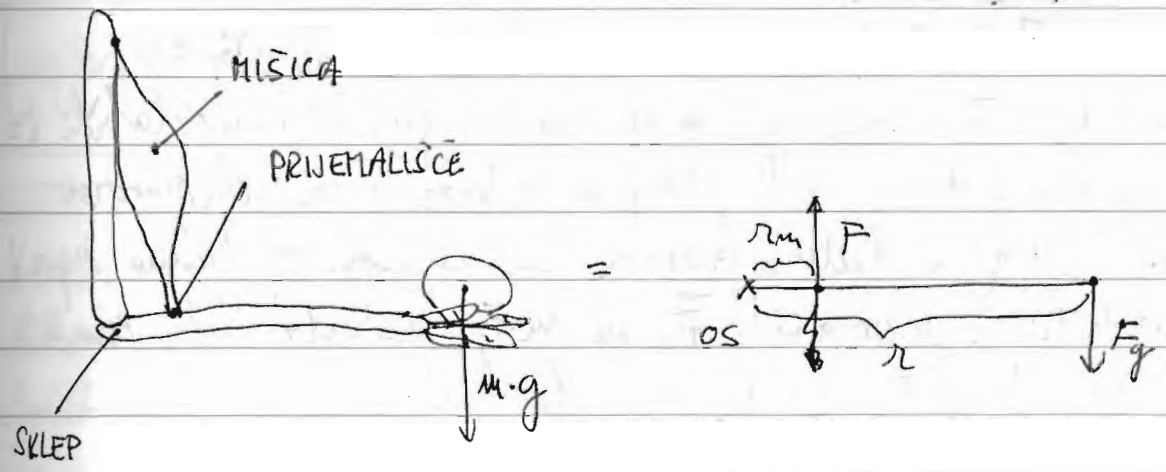
(b) Kako je z navori? Navor sile podlage je enak nič, ker je ročica te sile enaka nič. Ostaneta še navora sile teže deske in sile teže otroka

$$m_1 \cdot g \cdot r_1 - m_2 \cdot g \cdot r_2 = 0$$

$$r_2 = r_1 \frac{m_1}{m_2} = \frac{\ell}{6} \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

$$r_2 = \frac{4\,m}{6} \cdot \frac{20}{25} = \underline{\underline{0{,}53\,m}}$$

Primer 2: Izračunaj s kolikšno silo mora delovati mišica na roki, če drzimo v roki 5 kg utež, kot kaže slika. Razdalja med komolcem in utežjo je 40 cm, prijemališče mišice pa je 5 cm od komolcnega sklepa.



Navora morata biti enaka $F_g \cdot r - F \cdot r_m = 0$

$$\boxed{F = F_g \cdot \frac{r}{r_m}}$$

$$F = 5\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot \frac{40\,cm}{5\,cm} = \underline{\underline{392\,N}}$$

Primer 3: Lestev dolžine 5 m in maso 20 kg je prislonjena ob navpično steno, tako da sega do višine 4 m. Izračunaj velikosti sil v obeh dotikališčih lestve, pri čemer upoštevaj, da na navpični steni ni lepenja, na vodoravni pa je.

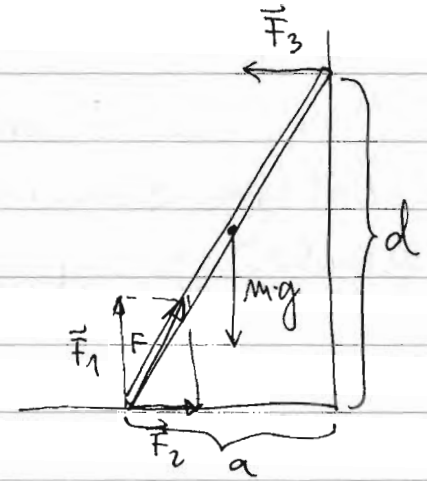
$l = 5\,m$

$m = 20\,kg$

$d = 4\,m$

$F_1, F_2 = ?$

$F_3 = ?$



Ravnovesje sil:

v navpični smeri $F_1 - m\cdot g = 0$

$$\boxed{F_1 = m\cdot g}$$

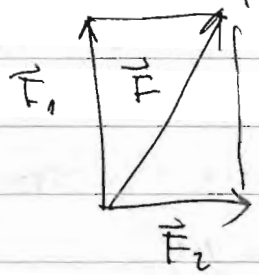
v vodoravni smeri $F_2 - F_3 = 0$.

Kako dobiti F_2 in F_3? Potrebujemo še eno enačbo. To bomo dobili iz pogoja, da se lestev ne vrti, torej mora biti vsota vseh navorov enaka 0. Pri tem si lahko izberem katero koli os, lahko npr. tudi dotikališče: navora sile $\vec{F}_3$ in $m\cdot\vec{g}$ morata biti enaka. Ročice sta d za F_3 in $a/2$ za silo teže.

$$m\cdot g\cdot\frac{a}{2} - F_3\cdot d = 0$$

$$F_3 = m\cdot g\,\frac{a}{2d} = m\cdot g\,\frac{\sqrt{l^2-d^2}}{2d} = 196\,\frac{\sqrt{25-16}\,N}{2\cdot 4} = \frac{196\cdot 3}{8}\,N =$$

Izračunam še celotno silo v posameznem dotikališču. V spodnjem imam dve sili, ki se vektorsko seštejeta:



$$F = \sqrt{F_1^2+F_2^2} = \sqrt{m^2g^2 + \frac{m^2g^2}{4d^2}(l^2-d^2)} =$$

$$= m\cdot g\sqrt{1-\frac{1}{4}+\frac{l^2}{4d^2}} = m\cdot g\sqrt{3/4+\frac{l^2}{4d^2}}$$

$$\boxed{F = m\cdot g\sqrt{3/4+\frac{l^2}{4d^2}}}$$

$F_1 = m\cdot g = 20\cdot 9{,}8\,N = \underline{\underline{196\,N}}$ $\qquad F_2 = 196\,N\sqrt{3/4+\frac{25}{4\cdot 16}} = \underline{\underline{209\,N}}$

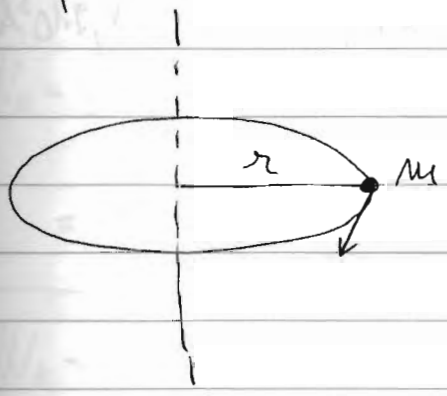
2.4. Kinetična energija togega telesa

Poljubno gibanje togega telesa lahko sestavimo iz gibanja težišča in vrtenja togega telesa okoli osi skozi težišče.

gibanje togega telesa = gibanje težišča (točke) + vrtenje telesa okoli težišča

Kinetična energija togega telesa je zaradi tega enaka vsoti kinetične energije zaradi gibanja težišča in rotacijske kinetične energije.

Rotacijska kinetična energija:



masa m (točka) kroži v razdalji r s hitrostjo v

W_k zaradi kroženja:

$$W_k = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(m \cdot r^2)}_{=J} \omega^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$W_k = W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

To velja splošno, ne samo za točkasto telo!

Kinetična energija togega telesa je potem:

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2$$

v^* ... hitrost gibanja težišča

ω .... kotna hitrost vrtenja telesa okoli težišča

Zapišimo sedaj energijski zakon za togo telo:
Delo zunanjih sil ali moči sile teže je enako vsoti sprememb kinetične energije zaradi gibanja težišča, sprememb potencialne in rotacijske energije.

Primer 1: Bakreno kroglo s polmerom 5 cm vržemo tako, da se kotali po ravni podlagi s hitrostjo 1 m/s. Kolikšna je kinetična energija krogle? Gostota bakra je $8{,}9 \cdot 10^3 \, kg/m^3$

$r = 5 \, cm$

$v^* = 1 \, m/s$

$\rho = 8{,}9 \cdot 10^3 \, kg/m^3$

$W_k = ?$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2$$

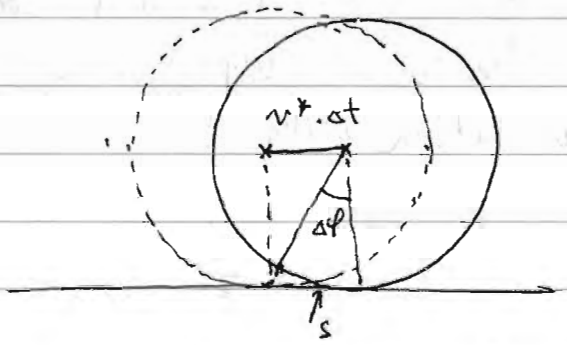
Ne poznam m, J in ω

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8{,}9 \cdot 10^3 \, kg/m^3 \cdot (0{,}05 \, m)^3}{a} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} 8{,}9 \cdot 10^3 \, kg/m^3 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3 \, m^3 = \frac{4\pi \cdot 8{,}9 \cdot 125}{3} \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \, kg$$

$$= 4{,}6 \, kg$$

Kako pa določim kotno hitrost pri kotaljenju?



lok je enak dolžini premika težišča!

$$s = v^* \cdot \Delta t = r \cdot \Delta\varphi \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v^*}{r}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v^*}{r}}$$ To velja pri kotaljenju (ali $v^* = \omega \cdot r$ obodna hitrost!)

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overbrace{\frac{\cancel{2}}{5} m \cdot \cancel{r^2}}^{J} \cdot \frac{v^{*2}}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{5} m v^{*2} =$$

$$= \frac{5+2}{10} m v^{*2} = \frac{7}{10} m \cdot v^{*2}$$

$$\boxed{W_k = \frac{7}{10} m \cdot v^{*2}}$$

$$W_k = \frac{7}{10} \cdot 4{,}6\,kg \cdot 1\,m^2/s^2 = \underline{\underline{3{,}2\,J}}$$

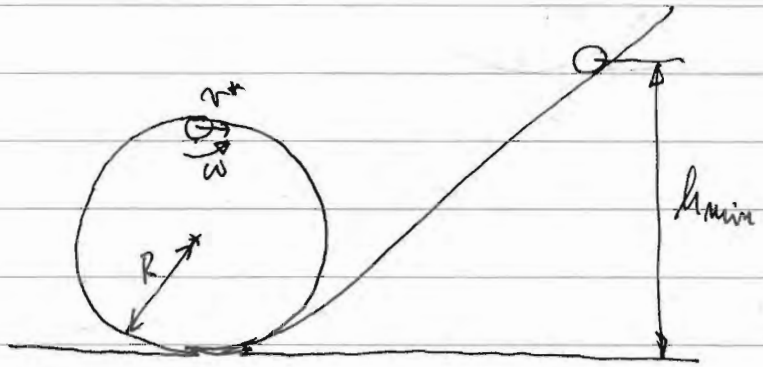
Primer 2: Kroglica z radijem 1 cm in maso 50 g se kotali po nagnjenem žlebu, katerega spodnji del je zavit v krog z radijem $R = 20\,cm$. Izračunaj s katere najmanjše višine moramo spustiti kroglico, da se ves čas dotika žleba!

$r = 1\,cm$

$m = 50\,g$

$R = 20\,cm$

$h_{min} = ?$



Začetno stanje: $W_k' = 0$

$W_p' = m \cdot g \cdot h$

$W_{rot}' = 0$

Končno stanje: $W_k = \frac{1}{2} m v^{*2}$

$W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

$W_p = m \cdot g \cdot 2R$

$$A = 0 = \frac{1}{2} m v^{*2} - 0 + m \cdot g \cdot 2R - m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} J \omega^2 - 0 = 0$$

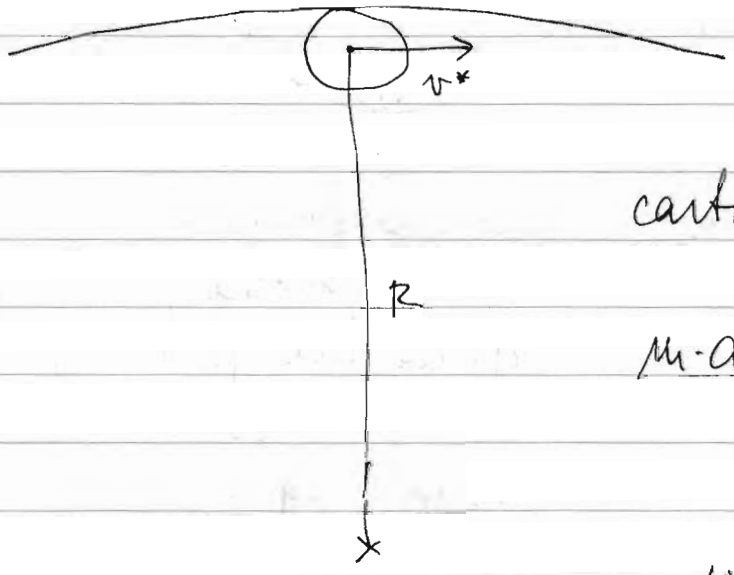
$$m \cdot g \, 2R - m \cdot g h + \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2 = 0$$

Velja: $J = \frac{2}{5} m r^2$, $v^* = \omega \cdot r$; to dvoje vstavim v zg. enačbo

$$m \cdot g \cdot 2R - m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = 0$$

$$m \cdot g \, 2R - m \cdot g h + \frac{7}{10} m \cdot \omega^2 r^2 = 0$$

Tu nam sedaj manjka v, kako ga dobiti? Poglejmo gibanje krogline, ko je v zgornjem delu. Krogla se mora tam še gibati zato da centrifugalna sila kompenzira silo teže!



centrifugalna sila je

$$m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^{*2}}{R} = m \cdot g$$

$$v^{*2} = R \cdot g$$

$$\omega^2 r^2 = R \cdot g$$

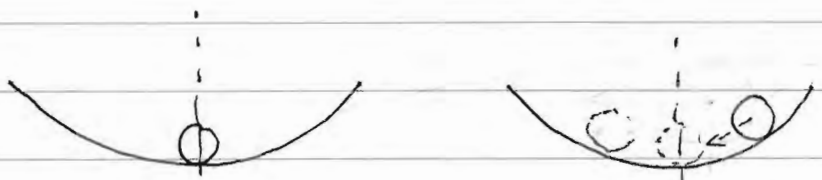
To vstavim v prejšnjo enačbo in dobim

$$m \cdot g \cdot 2R - m \cdot g \cdot h + \frac{7}{10} m \cdot g \cdot R = 0$$

$$\boxed{h = 2R + \frac{7}{10} R}$$

3. Nihanje

Poglejmo si primer kroglice, ki ja damo v kotanjo:



(a)
kroglica je v mirovni legi

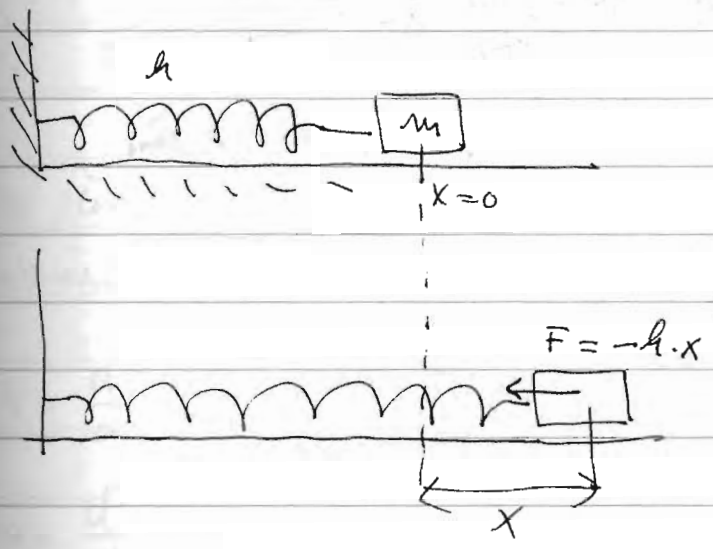
(b)
Če kroglico izmaknemo, sili iz mirovne lege, gre ven, takrat pa se zapet pojavi sila proti mirovni legi.

} posledica tega je nihanje kroglice

Zakaj kroglica niha: ko jo izmaknemo iz ravnovesne lege, se pojavi sila, ki vrača kroglico v ravnovesno lego. To je bistvo nihala: sila, ki je sorazmerna odmiku nihala od ravnovesne lege vi ki vrača nihalo v ravnovesno lego.

3.1. Nihalo na vijačno vzmet

Telo z maso m lahko brez trenja drsi po vodoravni podlagi. Poglejmo, kaj se zgodi z nihalom, ko telo pestrimo iz ravnovesne lege:



Kaj se bo zgodilo? masa m bo šla preko ravnovesne lege v drugo skrajno lego in zopet nazaj. To sebo periodično ponavljalo, tako da dobimo nihanje, vzmet in masa m pa tvorita nihalo.
Poglejmo sile, ki delujejo na nihalo v vodoravni smeri.
Velja dinamična zakon $F = m \cdot a$

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

$$m \cdot a + k \cdot x = 0$$

$$a + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Sedaj moram nihalo izračunati $x(t)$ iz te enačbe.

Za fiz. račun si moramo ogledati odvode funkcije. Naj koordinata telesa opiše funkcija $x(t)$

Tatem je hitrost $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, to smo izračunali pri kinematiki

Definiran hitrost kot odvod $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$ hitrost je prvi odvod koordinate po času

Kaj pa pospešek? $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$ pospešek je prvi odvod hitrosti po času

Kaj pa sveza med pospeškom in koordinato?

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2}}$$ pospešek je drugi odvod koordinate po času.

To definicijo pospeška uporabimo v gibalni enačbi našega nihala:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{m} \cdot x = 0}$$

Dobil sem diferencialno enačbo za odvisnost $x(t)$ nihala.

Kaj pomagapar pomeni ta enačba: dobiti moram takšno funkcijo $x(t)$, da bo tej enačbi zadoščala.
Iz matematike dobro poznamo rešitve take enačbe. Torej harmonične funkcije (sinusi in kosinusi). Togliejino ali je funkcija

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi)$$

x_0 .... amplituda nihanja
Ω .... krožna frekvenca nihanja
ϕ .... faza

res rešitev te enačbe?
Izračunati moram prvi in nato drugi odvod te funkcije

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \cdot (-\sin(\Omega t + \phi)) \cdot \Omega = -x_0 \Omega \sin(\Omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)$$

To odvaj vstavim v enačbo in dobim

$$-x_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi) + \frac{k}{m} \cdot x_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi) = 0$$

$$x_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

To mora biti izpolnjeno za vsak čas. Možnosti so

a) $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$, nič se ne zgodi, masa ne niha, ker je začetna koordinata kakor enaka 0.

b) $-\Omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ To je lastna (krožna) frekv. nihala.

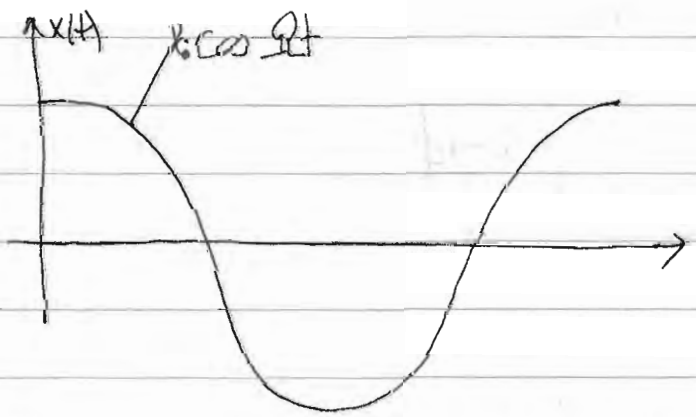
Nihalo potem res niha

$$X(t) = X_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \phi\right)$$

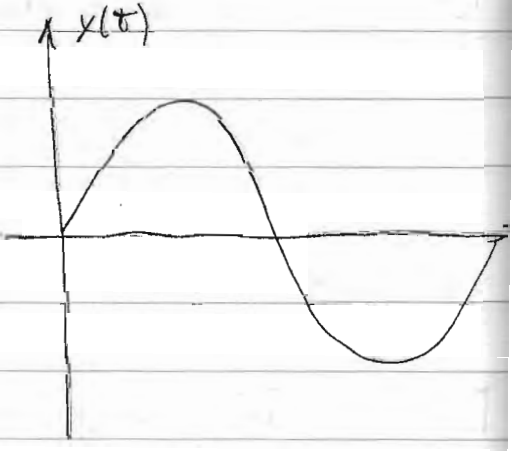
Kaj določa amplitudo? Ta je določena s tem, kako smo pognali nihalo, kako močno niha. Kaj pa ϕ? To pa določa odmik ob času $t=0$.

$$X(0) = X_0 \cdot \cos\phi$$

Če izberemo $\phi = 0$, potem je odmik ob času $t=0$ največji to bi ustrezalo temu, da nihalo napnemo in potem ob času $t=0$ spustimo.
Če izberemo $\phi = \pi/2$, potem je odmik ob času $t=0$ najmanjši.
Narišimo to



ali

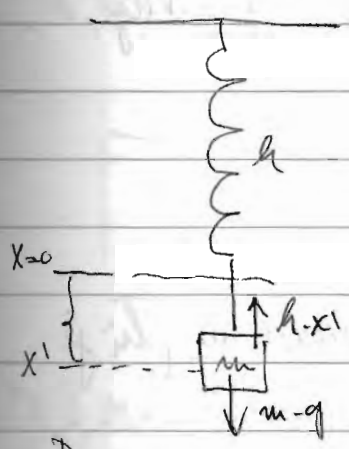


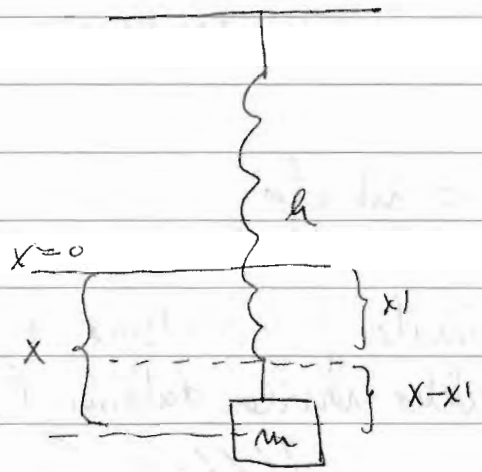
Če je $\phi \neq 0$ in $\phi \neq \pi/2$ dobimo nihaj vmes.

Ω je kotna hitrost nihala. Velja $\Omega = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{t_0}$

ν ... frekvenca nihala, t_0 ... nihajni čas

Kaj pa če isto nihalo postavim pokonci? Ali bo nihalo z isto frekvenco? Poskusimo premisliti: vse kar se zgodi je to, da se vsmet zaradi sile teže raztegne za določen del. Ta sila teže je stalna, ni odvisna od odmika nihala, zato ne more vplivati na nihanje nihala.





To je nova mirovna lega
V njej sta sila teže mg in silavzmeti uravnotečen

$$m \cdot g = k \cdot x'$$

Vsota vseh sil:

$$m \cdot g - k \cdot x = m \cdot a$$

odmik x zapišem kot

$$x = x' + (x - x')$$

$$m \cdot g - k(x' + (x - x')) = m \cdot a$$

$$\underbrace{m \cdot g - k \cdot x'}_{\text{to se mici}} - k(x - x') = m \cdot a$$

$$m \cdot a + k(x - x') = 0$$

$$a + \frac{k}{m}(x - x') = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x') = 0}$$

x' je neka konstanta, zato velja

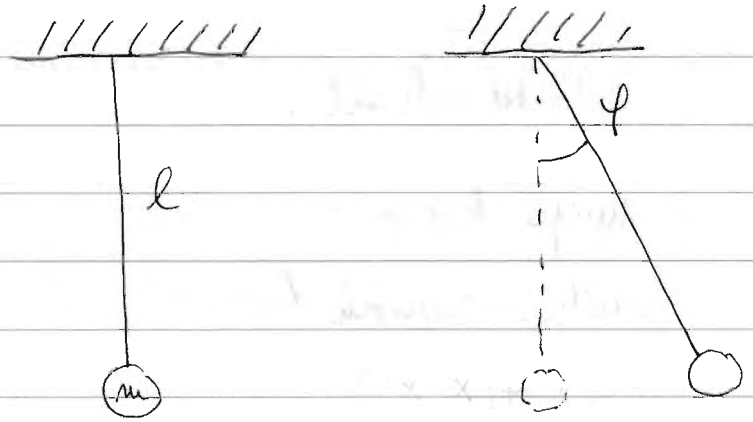
$$\frac{dx'}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2(x-x')}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2(x-x')}{dt^2}+\frac{k}{m}(x-x')=0}$$

To pa je enačba nihanja za $x(t)$, omerjen od nove ravnovesne lege x'.

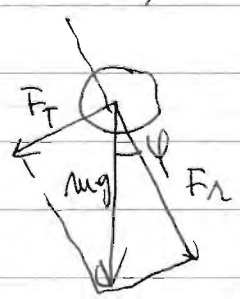
3.2. Matematično nihalo

Matematično nihalo je sestavljeno iz točkaste mase m, ki je obešeno na lahko vrvico dolžine l.



mirovna lega izmaknjena lega

Kaj sili kroglico v mirovno lego? Edino sila teže je lahko, toda s čim? Silo teže razstavim na dve komponenti, tangentno in radialno.



$|\bar{F}_t| = m \cdot g \cdot \sin\varphi \approx m \cdot g \cdot \varphi$ to velja za majhne kote.

Pazim še na predznak. Biti mora – saj silavleče telo, da hoče zmanjšati φ, torej ima obratno smer!

$$\bar{F}_t = -m \cdot g \cdot \varphi = m \cdot a_t = m \cdot \frac{dv_T}{dt} = m \cdot l \cdot \frac{d\omega}{dt} = m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$-m \cdot g \cdot \varphi - m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0}$$

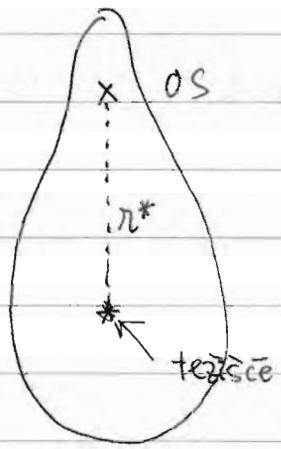
To je sedaj diferencialna enačba za kot $\varphi(t)$, ki je funkcija časa. Zopet uganemo rešitev:

$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi)$ φ_0 ... amplituda nihanja

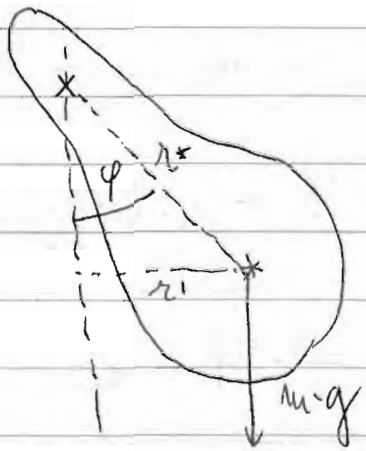
$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ Krožna frekvenca matematičnega nihala je neodvisna od mase!

3.3. Fizično nihalo

Telo z vztrajnostnim momentom J obesimo tako, da je os v razdalji r^* od težišča:



mirovna lega



$r' = r^* \cdot \sin\varphi$

Kaj hoče vrniti telo v mirovno lego? Navor sile teže, ki vrti telo. Sila teže prijemlje v težišču

$$-m \cdot g \cdot r^* \sin\varphi = M$$

$$-m \cdot g \cdot r^* \cdot \varphi = M = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot r^* \varphi = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot r^*}{J} \cdot \varphi = 0}$$

To je gibalna enačba za fizično nihalo.

Rešitve poznamo $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi)$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r^*}{J}}}$$

Krožna frekvenca nihala

34. Dušeno nihanje, vsiljeno nihanje in resonanca

Najprej si poglejmo kako je z energijo pri navadnem nihalu na vijačno vzmet. Energijo nihala sestavljata kinetična in prožnostna energija nihala.

$$W = W_k + W_{prož} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$W_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(-x_0 \Omega \cdot \sin(\Omega t + \phi)\right)^2 =$$

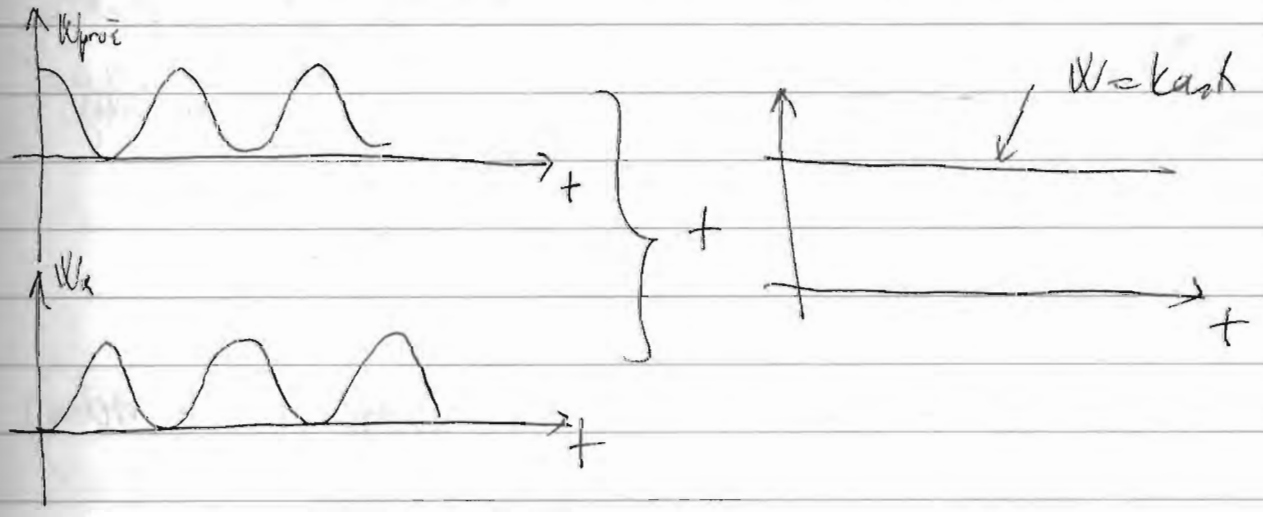
$$= \frac{1}{2} m x_0^2 \Omega^2 \cdot \sin^2(\Omega t + \phi)$$

$$W_{prož} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\Omega t + \phi) \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

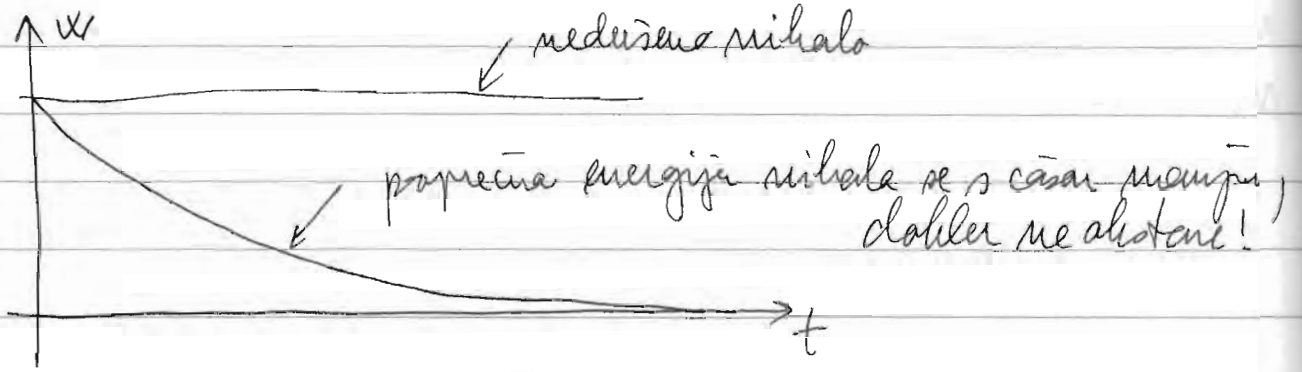
$$W = W_k + W_{prož} = \frac{1}{2} m \cdot x_0^2 \frac{k}{m} \cdot \sin^2(\Omega t + \phi) + \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\Omega t + \phi) =$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \left(\sin^2(\Omega t + \phi) + \cos^2(\Omega t + \phi)\right) = \frac{1}{2} k x_0^2$$

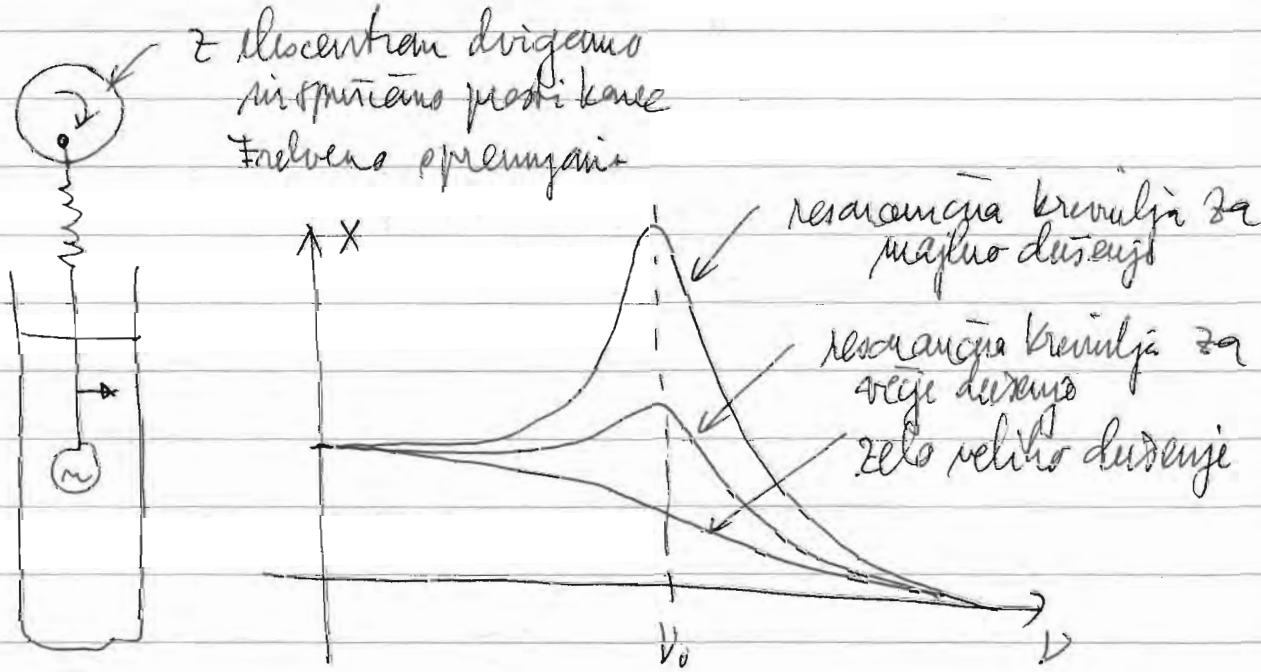
Energija sama se spreminja s časom. Čeprav se kinetična in prož. energija spreminjata s časom, je njuna vsota stalna!



To velja za idealen primer, v resnici pa to nihala dušena. To pomeni, da izgubljajo energijo, npr. s trenjem ipd., tako da se nihalo na koncu ustavi



Kaj je to vsiljeno nihanje? Na nihalo delujemo z neko zunanjo silo, ki niha, gledamo pa odziv nihala. Ugotovimo, da je odziv nihala zelo odvisen od frekvence, zunanje sile! Tri določeni frekvenci so odvisni vsiljenega nihanja nihala zelo velik, pravimo daje nihalo v resonanci.



Pojavi v naravi → resonanca!, vsiljeno nihanje (glasba, ocean)

3. Elastične deformacije trdnih teles

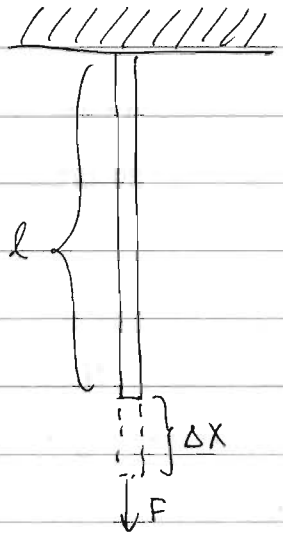
Ločimo tri agregatna stanja snovi:
- plin
- tekočina
- trdna snov

Togo telo je trdno v primerjavi s silami, ki na to telo delujejo. To pomeni, da so deformacije togega telesa zanemarljivo majhne. Pri trdnem telesu pa so deformacije lahko zelo velike. Če trdno telo naprimer raztegnemo, se podaljša, če ga stisnemo, se skrajša.

deformacija ..... sprememba oblike telesa
elastična (prožna) ... takšna deformacija, pri kateri se telo povrne v prvotno obliko, ko preneha delovati zunanja sila.

Pri velikih deformacijah lahko pridemo do meje prožnosti in nastopi "plastična" deformacija. Pri takšni deformaciji se telo ne povrne v prvotno obliko, ko preneha delovati zunanja sila.

3.1. Hookov zakon in prožnostni modul



Vzemimo žico, ki je pritrjena na steno in jo obremenimo s silo F. Zaradi te sile se bo žica podaljšala za Δx.

Velja Hookov zakon pri majhnih raztezkih:

$$F = k \cdot \Delta x$$

F ... zunanja sila
k ... elastični koeficient
Δx ... podaljšek žice

Hookov zakon torej opisuje raztezanje ali skrčenje telesa pod vplivom zunanje sile. Poskusimo ugotoviti, od česa je ta koeficient k zares odvisen!

Raztezek bo tem večji, čim večja bo začetna dolžina žice. Če bo ta dvakrat daljša, bo raztezek tudi dvakrat večji, torej $\Delta x \propto l$, pa tudi s silo

$$\Delta x \propto l \cdot F$$

Raztezek bo manjši, če bom vzel žico z manjšim prezeku,

$$\Delta x \propto \frac{l \cdot F}{S}$$

To pa so torej vsi geometrijski podatki. Definiram še prožnostni modul E: čim večji je ta modul, tem manjši

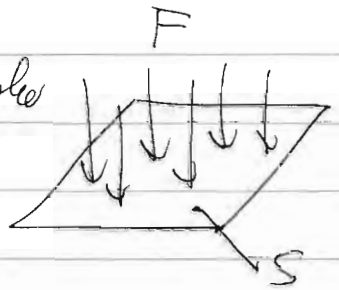
to raztezek in dobim

$$\Delta x = \frac{l}{E} \cdot \frac{F}{S}$$

Torej to pišem $\boxed{\frac{F}{S} = \frac{E \cdot \Delta x}{l}}$

Količino F/S imenujem tudi tlak (ali napetost v telesu)

$\boxed{p = \frac{F}{S}}$ to je torej sila na površino enoto:



Enota za tlak je $N/m^2 = Pa$ (Pascal).
V rabi je še bar, ki je $1\,bar = 10^5\,Pa = 10^5\,N/m^2$, ker je 1 Pa zelo majhna enota.

Zapišimo si še elastične module za različne snovi E:

jeklo: $20 \cdot 10^{10}\,N/m^2$
steklo: $5 \cdot 10^{10}\,N/m^2$
kavčuk: $0{,}8 \cdot 10^{10}\,N/m^2$

Kolikšen pa so raztezki? To si izračunajmo na primeru.

Primer: na 5m dolgi jekleni žici s premerom 1mm obesimo 50 kg težko breme. Za koliko se podaljša žica? Kolikšen je tlak v žici?

$l = 5m$

$2R = 1\,mm$

$m = 50\,kg$

$E = 20 \cdot 10^{10}\,N/m^2$

$\Delta x = ?$

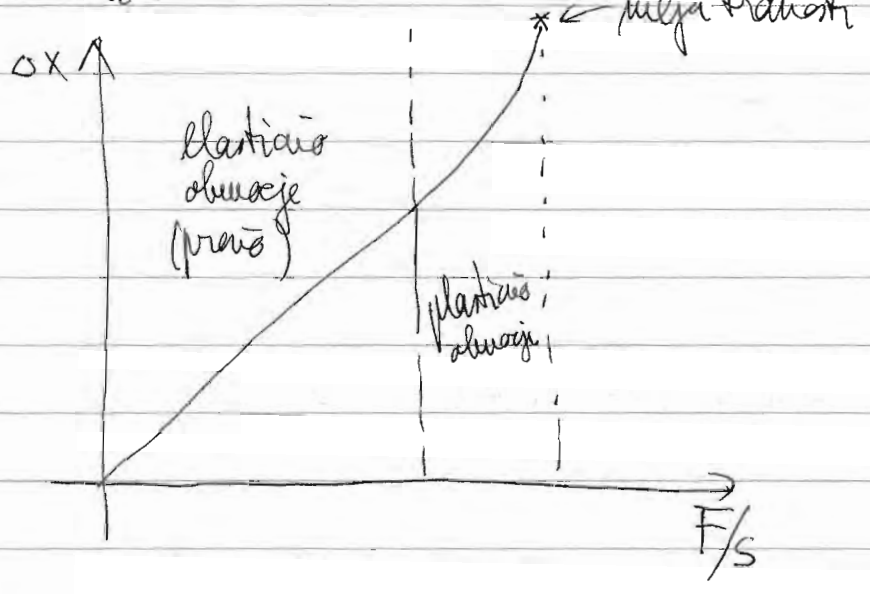
$$\Delta x = \frac{F}{S} \cdot \frac{l}{E} = \frac{m \cdot g \cdot l}{E \cdot \pi R^2}$$

$$\Delta x = \frac{50\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 5m}{\pi (0{,}5 \cdot 10^{-3})^2 m^2 \cdot 20 \cdot 10^{10}\,N/m^2} = \underline{\underline{15{,}6\,mm}}$$

Kolikšen je tlak v žici?

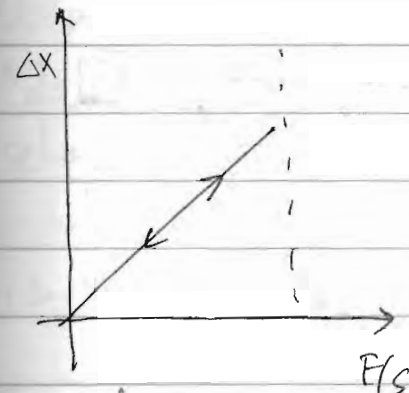
$$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{\pi r^2} = \frac{50\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2}{\pi (0{,}5 \cdot 10^{-3}\,m)^2} = 6{,}24 \cdot 10^8\,N/m^2 = \underline{\underline{6200\,bar}}$$

Seveda snovi ne moremo v nedogled obremenjevati, saj slej ko prej popusti. Narišimo, kaj se dogaja z raztezki:

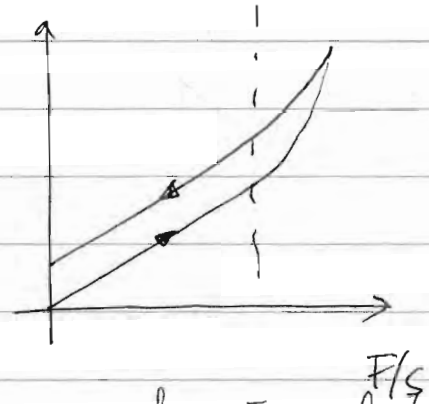


Za materiale tvoj žile ne smejo preseči določene meje,

preko katere se začnejo plastične deformacije. Razlika med elastično in plastično deformacijo žice:



pri elastični deformaciji se telo povrne v prvotno obliko



če prekoračimo elastično področje, se telo ne povrne v prvotno obliko. Pravimo da se plastično deformira.

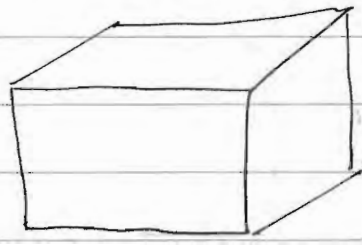
Pokaži eksperimente:

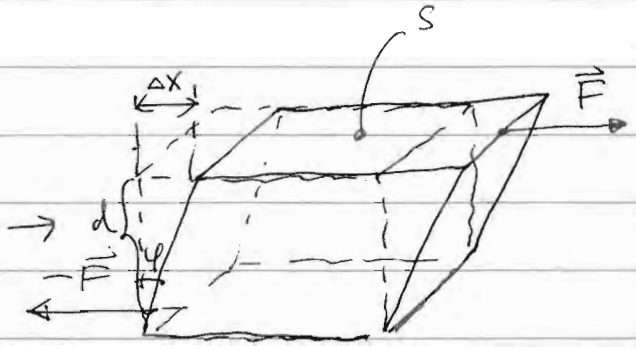
1) Hookov zakon: natezanje žice
2) Hookov zakon: raztezanje kavčuka
3) Plastična deformacija
4) Prožnost stekla: steklenica s kapilaro
5) Prožnost stekla: steklena folija 0,15 mm in pa optično vlakno.
6) Prečna skrčitev

7) gumo ohladi v dušiku
↓
postane krhka.

3.2. Strižna deformacija in torzija

Strižna deformacija:

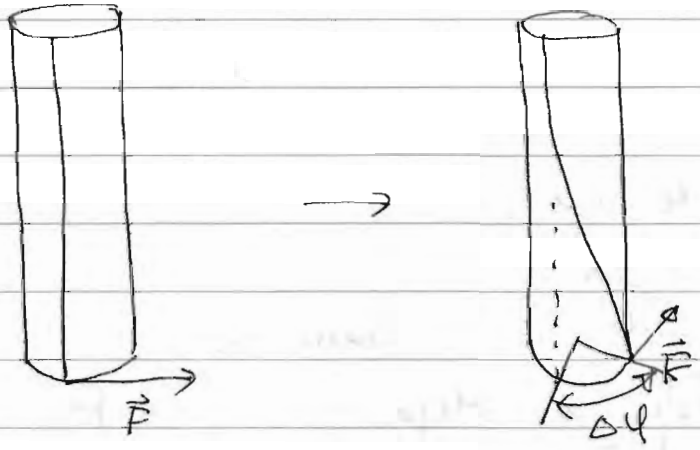




$$\frac{F}{S} = G \cdot \frac{\Delta x}{d} = G \cdot \operatorname{tg}\varphi$$ G.... strižni modul

Primer: deformacija modela iz penaste gume

Torzija



Sila $\vec{F}$ ima navor! Spodnji del se je zasukal za $\Delta\varphi$, ki je sorazmeren z navorom

$$M = D \cdot \Delta\varphi$$ D .... torzijski koeficient

Primer: cev

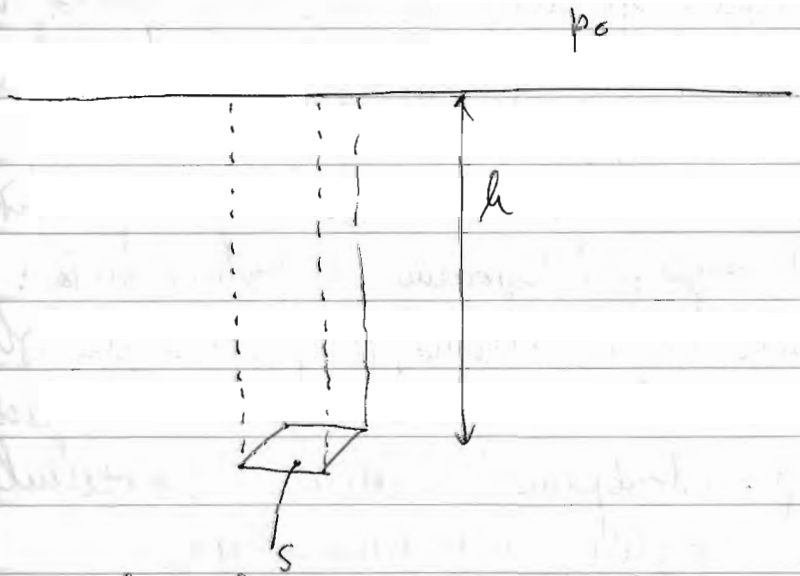
4. Mehanika tekočin

Osnovna lastnost tekočin je ta, da lahko tečejo, torej nimajo "stalne" oblike, tavveč se posamezni deli tekočine med seboj gibljejo neodvisno.

4.1. Hidrostatika tekočin: hidrostatski tlak in vzgon

Pri hidrostatiki obravnavamo statiko tekočin.

Hidrostatski tlak:



Tlak v globini h: to je sila na ploskovno enoto, $p = \frac{F}{S}$.
Od kod izvira torej v tekočini tlak? Očitno ga tem prispeva tista tekočina, ki je nad določenim mestom in pritiska na ploskev S. ta sila je

$$F = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot S \cdot h \cdot g$$

Sila na ploskovno enako, to je tlak pa je

$$p = \frac{F}{S} = \rho g h \qquad \boxed{p = \rho \cdot g \cdot h}$$

to je hidrostatski tlak zaradi tekočine

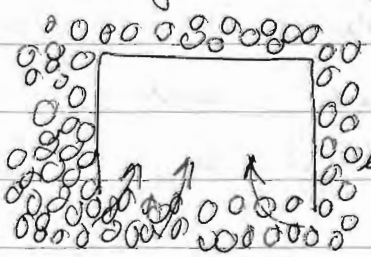
Če je nad tekočino še tlak p_0, potem moramo ta tlak še dodatno prišteti,

$$\boxed{p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h}$$

p_0 ... tlak nad tekočino

Od kod izvira atmosferski tlak? Od teže zraka nad nami! Zato se ta tlak z višino spreminja in nas boli glava, ko gremo v hribe.

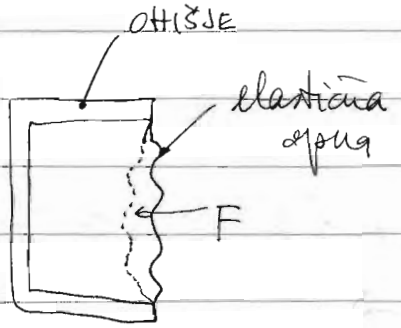
Kako je s smerjo tlaka? Ali tlak ~~pri~~ tekočine pritiska samo v smeri od zgoraj? Spomnimo se potapljanja: tu čutimo tlak od vseh strani enako, torej voda pritiska od vseh smeri enako. Pravimo, da je tlak izotropen. Kako si to lahko predstavljamo? Mislimo si molekule vode kot majhne kroglice, ki so tesno skupaj:



kroglice silijo v notranjost, ker se med njimi sile prenašajo tako, da zgornje kroglice pritiskajo na spodnje, se pa teže jo v notranjost.

To preverimo s poskusom:

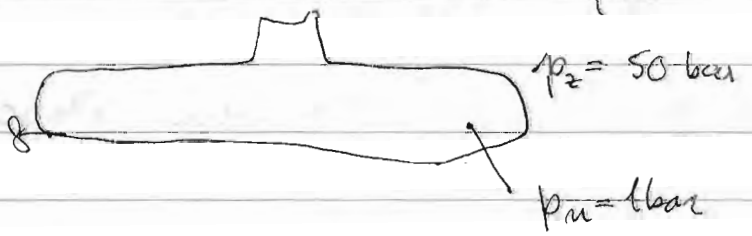
Manometer na opno:



Elastična opna se pod vplivom tlaka deformira (upogne). Upogib je sorazmeren z deformacijo, na ta način pa merimo tlak.
S poskusom ugotovimo, da je hidrostatski tlak, ki ga na dani globini izvrši sonda, neodvisen od smeri, v katero je obrnjena sonda.

Zgled: izračunaj hidrostatski tlak, ki ga mora prenesti podmornica v globini 500 m! S kolikšno silo deluje voda na vsak kvadratni meter površine telesa?

$$p = p_0 + \rho g h = 1\,\text{bar} + 10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 5 \cdot 10^2\,\text{m} =$$
$$= 1\,\text{bar} + 49 \cdot 10^5\,\text{kg m}^2/\text{s}^2/\text{m}^3 =$$
$$= 1\,\text{bar} + 49 \cdot 10^5\,\text{N/m}^2 = 1\,\text{bar} + 49\,\text{bar} = \underline{50\,\text{bar}}$$



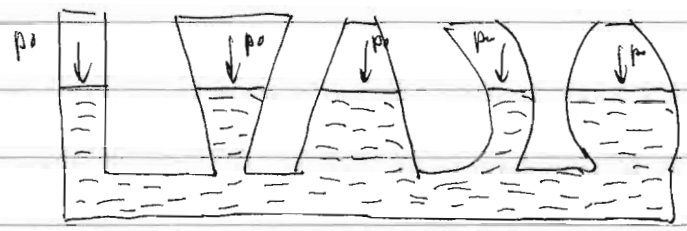
Razlika tlakov je 49 bar

$$\frac{F}{S} = p_z - p_n \Rightarrow F = S \cdot (p_z - p_n) = 1\,\text{m}^2 \cdot 49 \cdot 10^5\,\text{N/m}^2 = 4{,}9 \cdot 10^6\,\text{N}$$

1 tona = 10^3 kg → $\underline{10^4\,\text{N}}$; sila znaša torej $\underline{490\,\text{ton}}$!!

Kako merimo tlak? Merimo ga z manometri

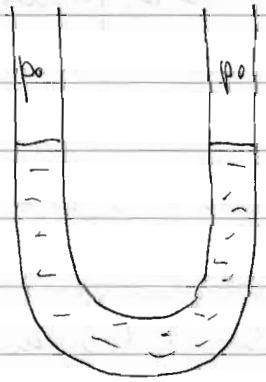
Najbolj preprosti manometrie so izvedeni v obliki vezanih posod:



Gladina tekočine je v vseh kravkih enaka, ker je nad vsako gladino enak zračni tlak.

Vzamem odprto cevko v obliki U in dobim

a) odprti manometer ; p_0 .... navadni zračni tlak



$1\,bar = 10^5\,N/m^2 = 750\,tor$

$1\,m\,bar = 0{,}75\,tor$

Običajen zračni tlak je 760 tor, t.j. 1010 m bar

če v enem kraku tlak povečamo, postaneta višini stolpcev različni.

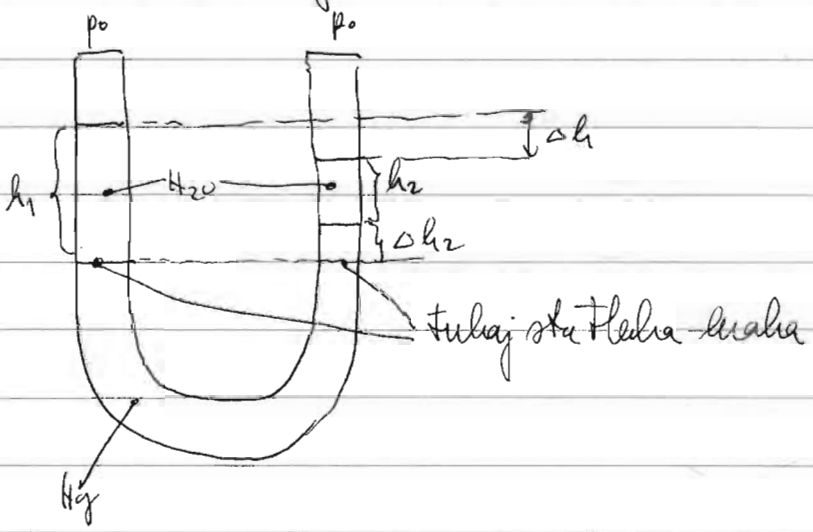
Primer 1: ~~Vzaprtem~~ V cevki U je živo srebro z gostoto 13,6 g/cm³. V levi krak nalijemo 10 cm visok stolpec vode in v desni krak 6 cm visok stolpec vode. Kolikšna je višinska razlika v krakih

$h_1 = 10\,cm$

$h_2 = 6\,cm$

$\rho_{Hg} = 13{,}6\,g/cm^3$

$\Delta h = ?$

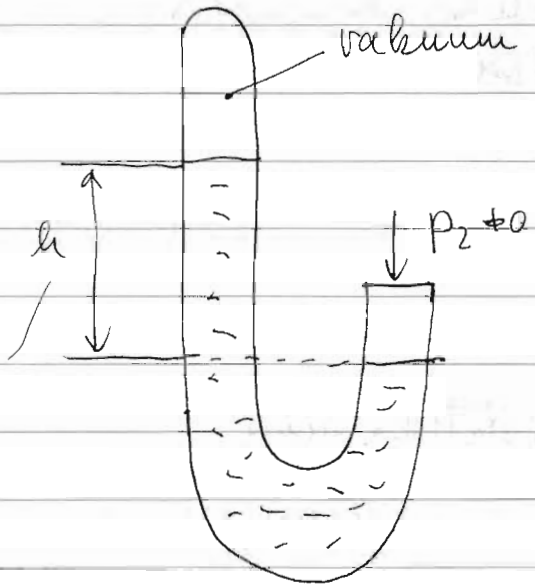


$$p_0 + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_1 = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_2 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h_2 + p_0$$

$$\Delta h_2 = \frac{\rho_{H_2O} \cdot (h_1 - h_2)}{\rho_{Hg}} = 0{,}29\,cm$$

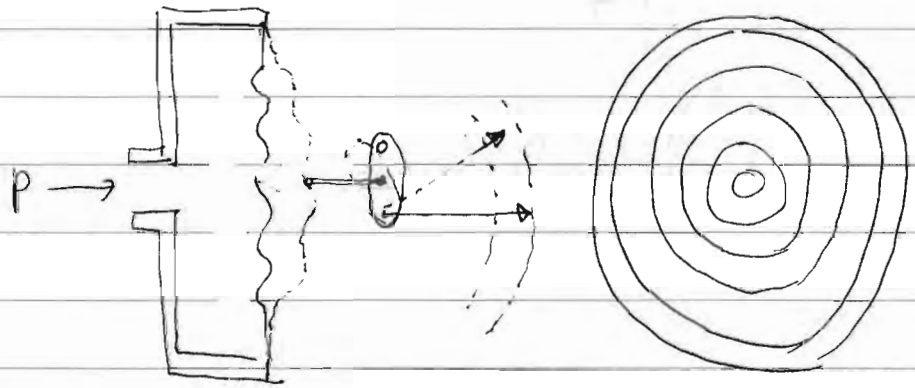
$$\Delta h = h_1 - h_2 - \Delta h_2 = \underline{\underline{3{,}7\,cm}}$$

b) zaprti manometer



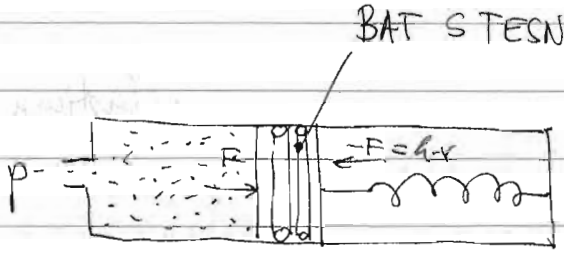
$$p_2 = \rho \cdot g \cdot h$$

c) manometer na elastično membrano



Na membrano je pritrjena ročica, ki preko vzvoda premika kazalec. Tak manometer je potrebno umeriti.

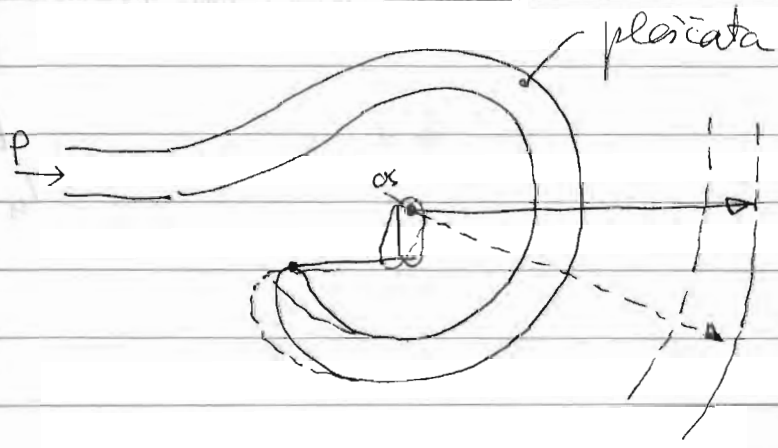
d) manometer na bat:



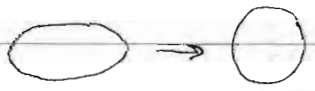
Bat se zaradi pritiska premakne, tako da se vzmet stisne.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{k \cdot x}{S}$$

e) manometer na Bourdonova cev:



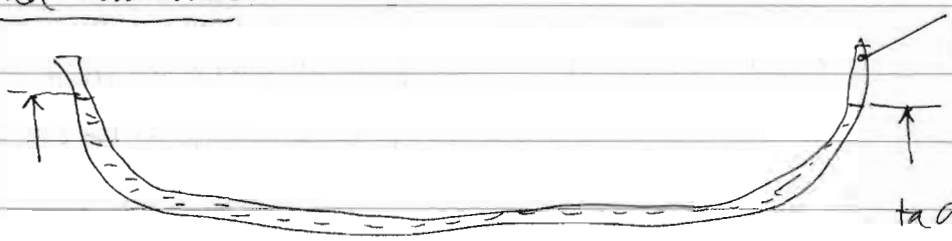
Cev mora biti plosčata



da se pod pritiskom raztegne, kar povzroči premikanje cevi

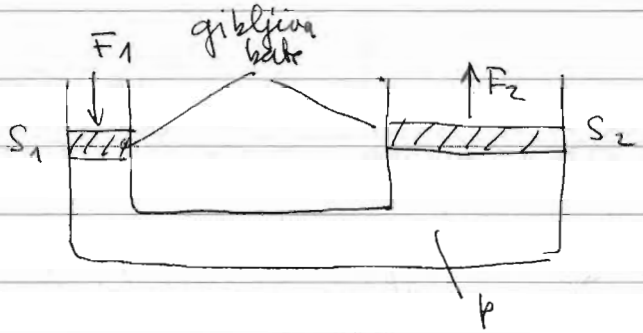
Poglejmo si še dva primera uporabe hidrostatičnega tlaka: vodna tehtnica in pa hidravlična stiskalnica

vodna tehtnica:



ta dva kraca sta na enaki višini (ker je enak tlak nad njima)

hidravlična stiskalnica



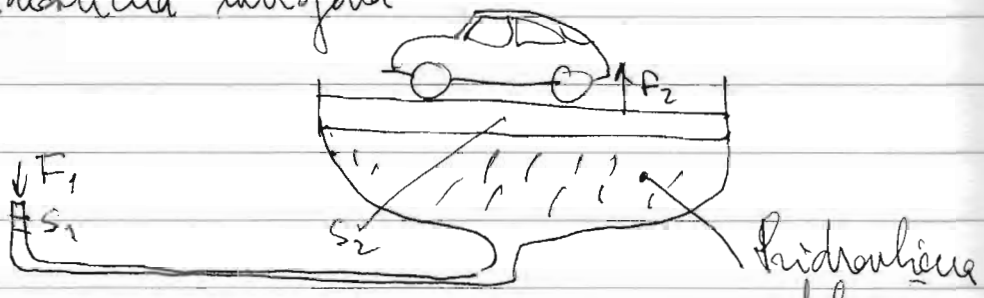
pritisk je enak na prvem, kot na drugem batu

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

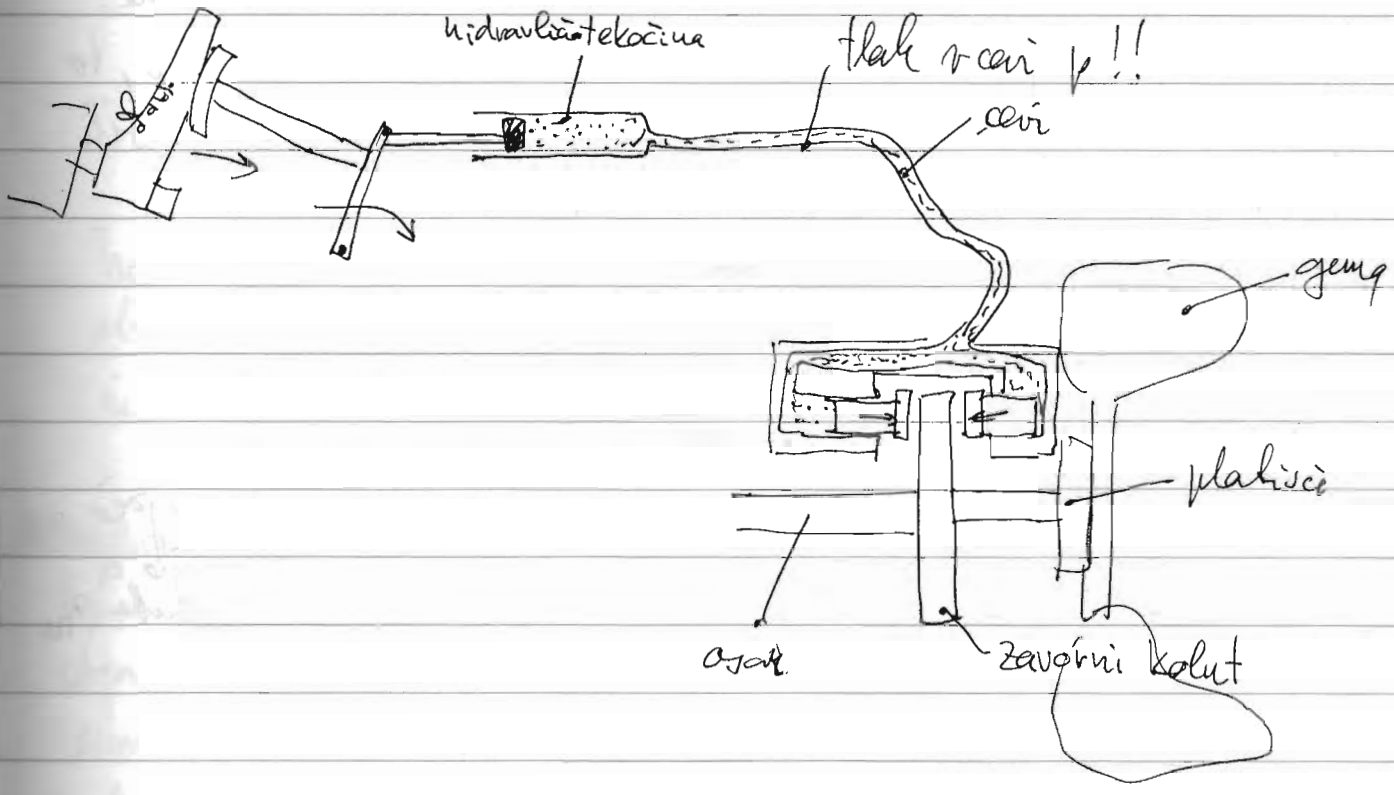
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1}$$

Primer, če je $S_2 \approx 100 \cdot S_1$, je sila F_2 100 x večja !!

Na tem principu delujejo hidravlične stiskalnice ali pa npr. hidravlična dvigala



Hidravlika uporabljamo še v letalih, vozilih (hidravlične zavore) itd.



→ prerez $S_1 = 1\,cm^2$
$S_2 = 400\,cm^2 \Rightarrow F_2 = 400 \cdot F_1$

Če je F_2 sila teže avtomobila z maso $m_2 = 1200\,kg \Rightarrow$

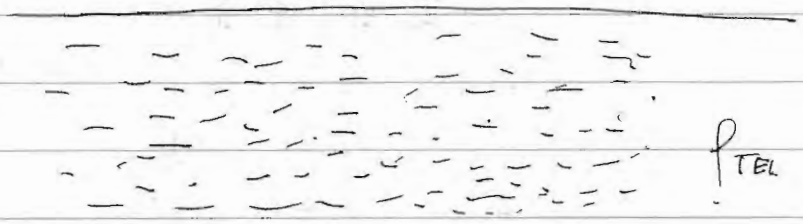
$F_2 = m_2 \cdot g$ $\quad m_2 = 400 \cdot m_1 \Rightarrow m_1 = \frac{1200}{400} = 3\,kg$

$F_1 = m_1 \cdot g$ $\quad$ S 3 kg mase lahko dvignemo 1200 kg avtomobil !!!

Vzgon v tekočinah

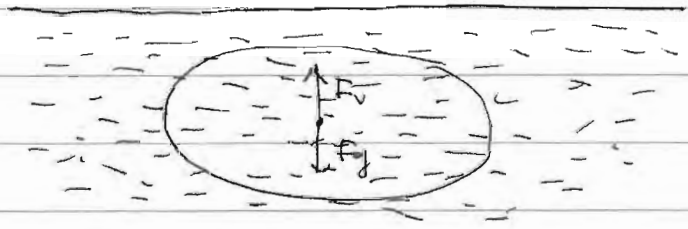
Iz izkušenj vemo, da nekatera telesa plavajo, druga pa ne. Vprašamo se, kaj je vzrok za to. Če telo plava na tekočini, to pomeni, da na telo deluje dodatna sila, ki je nasprotna sili teže. Izvor te sile je pojasnil že Arhimedes s svojim znamenitim miselnim poskusom:

(a)



Vzamem mirujočo tekočino z gostoto ρ_{TEK}

(b)

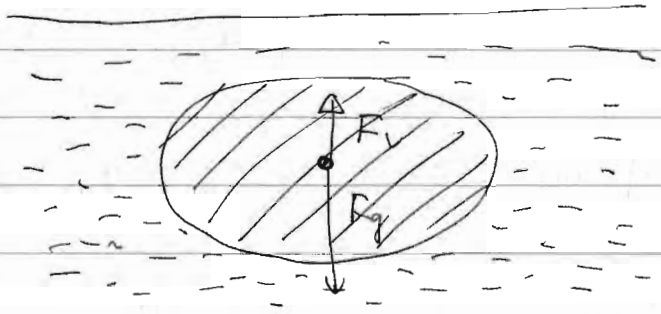


V tej tekočini si zamislim ~~odprt~~ zaključen ploskev, ki obejmo tekočino ~~...~~ z volumnom V

Ta tekočina miruje, torej mora nanjo delovati neka sila vzgona okoliščnje tekočine, F_V, ki kompenzira težo te tekočine

$$F_V = -F_g = -\rho_{TEK} \cdot V_{TEK} \cdot g$$

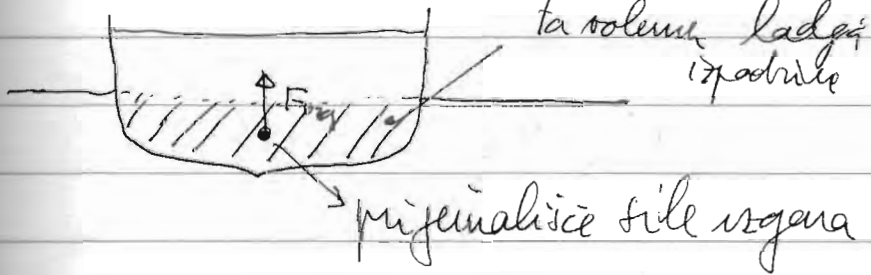
(c) Če dam namesto vodesedaj neki drugi predmet, bo ta sila vzgona še vedno enaka!



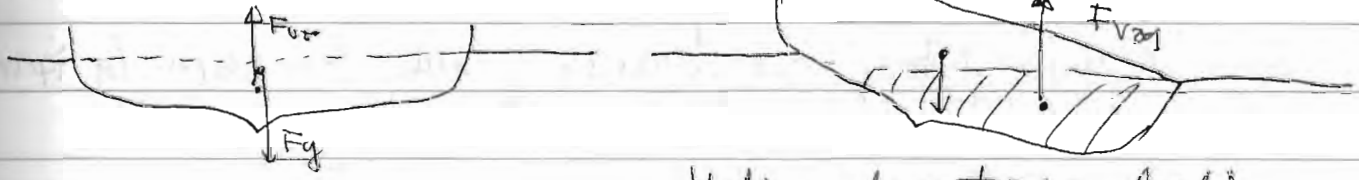
Trudnet ko torej merimo težo! Sila ne bo odvisna od oblike potopljenega telesa temveč samo od volumna telesa in gostote izpodrinjene tekočine.

Vzgon je navpična projekcija rezultante vseh sil, s katerimi tekočina pritiska na potopljeno telo. Prijemališče sile vzgona je v težišču izpodrinjene tekočine, po velikosti pa je enaka sili teže izpodrinjene tekočine.

Ladja: preči preko

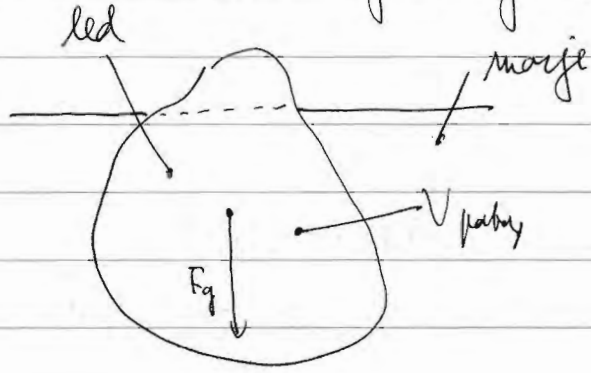


Kaj se dogaja pri zibanju ladje?



Vidimo, da se težišče ladje izpodrinjene tekočine "premesi" in vrača ladjo v ravnovesje

Primer: Ledena gora z gostoto $\rho_L = 0{,}95\ g/cm^3$ plava po gladini morske vode z gostoto $\rho_V = 1{,}1\ g/cm^3$. Kolikšen del prostornine ledene gore gleda iznad morske gladine?



$\rho_L = 0{,}95\ g/cm^3$

$\rho_V = 1{,}1\ g/cm^3$

$\frac{V_{gore}}{V_{potopl.}}$? $\quad \frac{V_{potopljen}}{V_{gore}} = ?$

Celotna sila teže ledene gore je $F_g = \rho_L \cdot V_{gore} \cdot g$

Sila vzgona je enaka teži izpodrinjene tekočine

$$F_{vzg} = \rho_V \cdot V_{potop} \cdot g$$

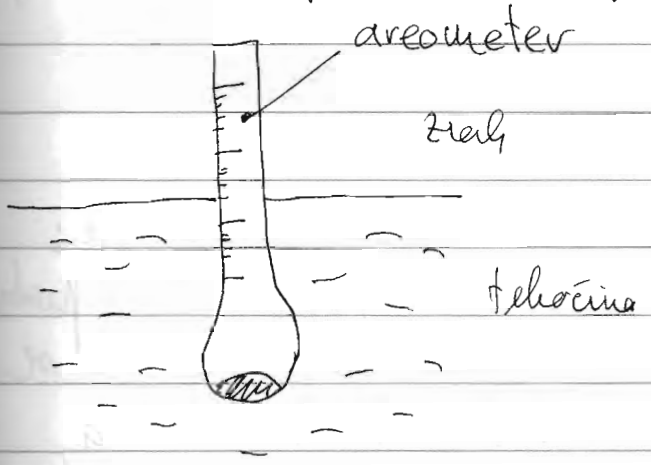
V ravnovesju sta ti dve sili enaki

$$F_g = F_{vzg} \qquad \rho_L \cdot V_{gore} \cdot g = \rho_V \cdot V_{potop} \cdot g$$

$$\frac{V_{potop}}{V_{gore}} = \frac{\rho_L}{\rho_V} = \frac{0{,}95}{1{,}1} = 0{,}86 = 86\%$$

86% volumna je torej potopljenega, samo 14% pa gleda iz vode.

Areometer: naprava za merjenje gostote tekočine



Areometer plava zaradi sile vzgona. Čim redkejša je tekočina, temeljitej se bo potopil, ker da se sila vzgona izpodrinjene tekočine izenači s silo teže.

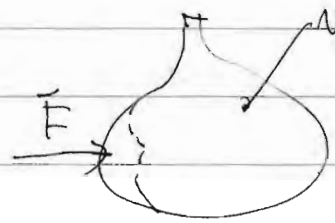
Z areometri merimo gostoto tekočin. S posebnimi areometri lahko merimo npr. koncentracijo raztopine (alkoholometer) (voda + alkohol: gostota je odvisna od vsebnosti alkohola, zato lahko iz gostote merimo tudi koncentracijo alkohola).

4.2. Hidrodinamika tekočin : tok tekočine in Bernoullijeva enačba

Tok tekočine

Osnovna lastnost tekočine je ta, da teče. To pomeni naslednje: Trdna snov lahko prenaša statične sile, medtem ko prosta tekočina ne more prenašati statičnih sil. Trdna snov se pod vplivom zunanje sile deformira. Ko sila preneha, se trdno telo povrne v prvotno obliko. Tekočina pod vplivom sile teče, lahko se meša. Ne more pa prosta tekočina prenašati statične sile.

Trdno telo prenaša statično silo

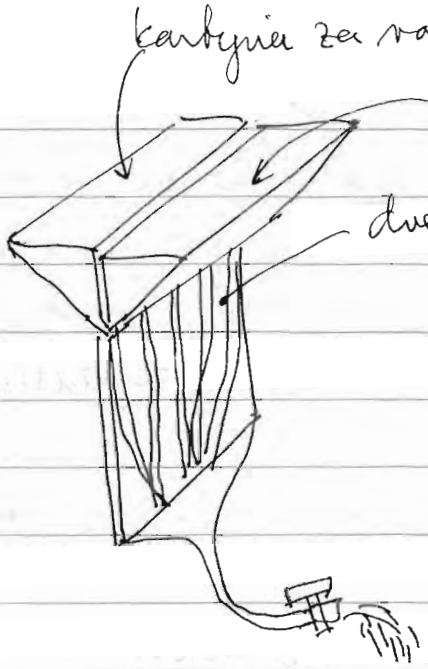


Tekočina pod vplivom statične sile teče!

Gibanje tekočine je dosti bolj komplicirano od gibanja togega telesa, ker se posamezni deli tekočine (molekule) mešajo, t.j. spreminjajo svojo lego glede na druge dele tekočine.

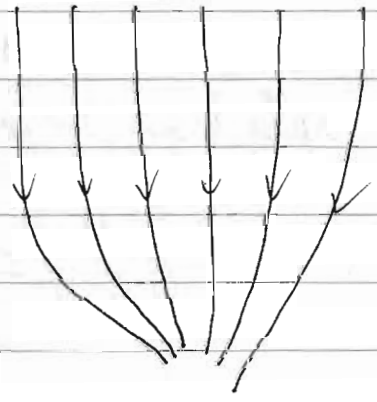
Gibanje tekočine lahko opazujemo na tak način, da v tekočino damo vidne delce in se gibljejo skupaj s tekočino. Na ta način lahko spremljamo gibanje tekočine. Ti delci so lahko žaganje, opilki, barvilo ip.d.

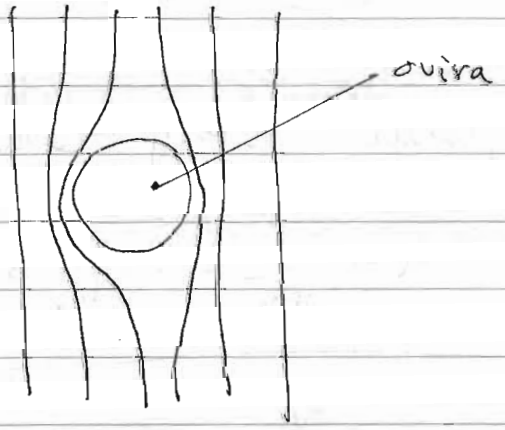
Pokaži primer : Pohlov aparat



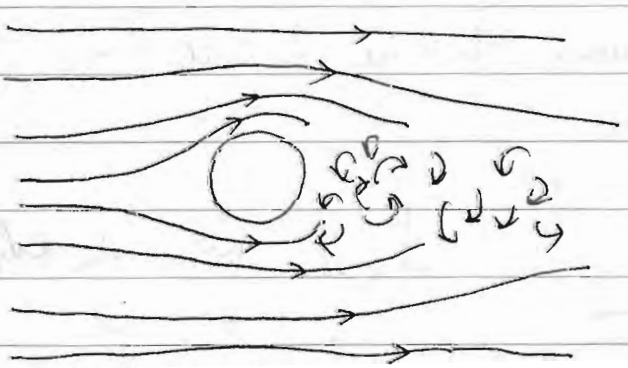
Tok tekočine si grafično predstavimo s tokovnicami. To so poti, po katerih se gibljejo posamezni delci tekočine. Glede na obliko tokovnic razlikujemo dve vrsti toka:

1) Laminarni tok: tokovnice so med seboj lepo vzporedne. Ni vrtincev. (kot lepo počesani lasje)





2) Turbulentni (vrtinčasti) tok. Co vrtinci (raskuštrani lasje)

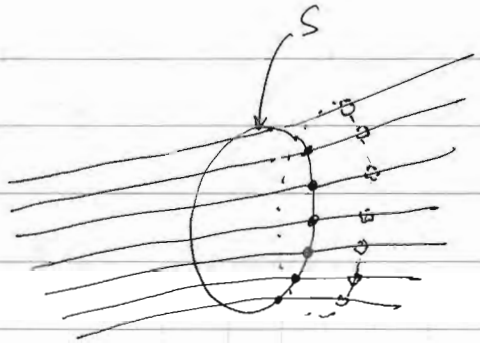


Tok okoli avta je turbulenten.

Od česa je odvisna oblika toka? Od hitrosti toka tekočine in od viskoznosti. Če se oblika tokovnic in hitrost tekočine s časom ne spreminjata, govorimo o stacionarnem toku. Če se oblika tokovnic in hitrost tekočine spreminjata s časom, je tok nestacionaren.

Masni in volumski tok pri laminarnem toku tekočine

Masni tok je enak masa tekočine, ki gre skozi površino S v časovni enoti.



V času Δt se deli tekočine premaknejo za

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

v ... hitrost tekočine

Skozi ploskev S je torej v času Δt šla naslednja masa tekočine

$$\Delta m = \rho_{tek} \Delta V = \rho_{tek} \cdot S \cdot \Delta x = \rho \cdot S \cdot v \cdot \Delta t \quad / : \Delta t$$

$$\boxed{\Phi_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_{tek} S \cdot v}$$

Φ_m ... masni tok tekočine

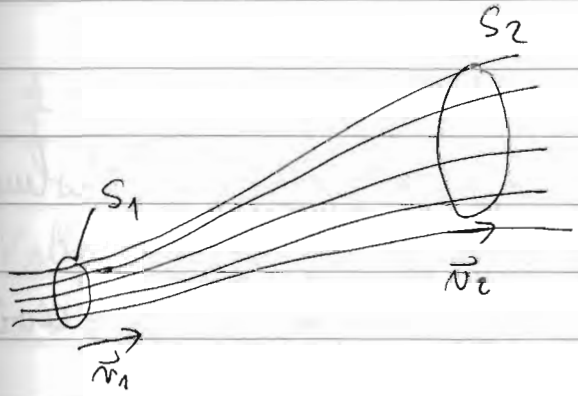
Volumski tok pa je enak volumu tekočine, ki gre skozi površino S v časovni enoti.

$$\boxed{\Phi_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \cdot \Delta x}{\Delta t} = S \cdot v}$$

Φ_v ... volumski tok tekočine

Velja zveza $\Phi_m = \rho_{tek} \cdot \Phi_V$

Pri stacionarnem gibanju tekočine je v = konst in je masni tok konstanten. Toliko tekočine kot priteče v dan volumen, jo tudi izteče (se ne izgubljo). ~~Če je tekočina nestisljiva velja~~:



$$\Phi_{m1} = \Phi_{m2}$$

$$\boxed{\rho_{t1} S_1 v_1 = \rho_{t2} S_2 v_2}$$

Če je nestisljiva tekočina:

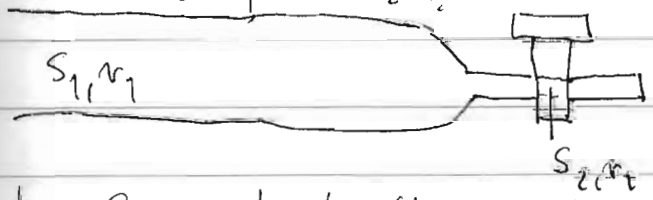
$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$ ← Če je tekočina nestisljiva

Kontinuitetna enačba. Če se presek tokovne cevi smanjša, teče tekočina hitreje. Na ozkih delih cevi torej teče tekočina hitreje.

Primer: Po vodovodni cevi s premerom 2 cm priteče v pipo vsako minuto 10 l vode. Kolikšna je hitrost vode v cevi? Kolikšna je hitrost vode v ventilu vodovodne pipe, kjer je premer cevi samo 5 mm?

$V = 10\,dm^3$ $\quad 2r_1 = 2\,cm$ $\quad v_1 = ?$

$t = 60\,s$ $\quad 2r_2 = 0{,}5\,cm$ $\quad v_2 = ?$



ventil z lukujo

$\Phi_V = S \cdot v$ = konst (ker je voda nestisljiva)

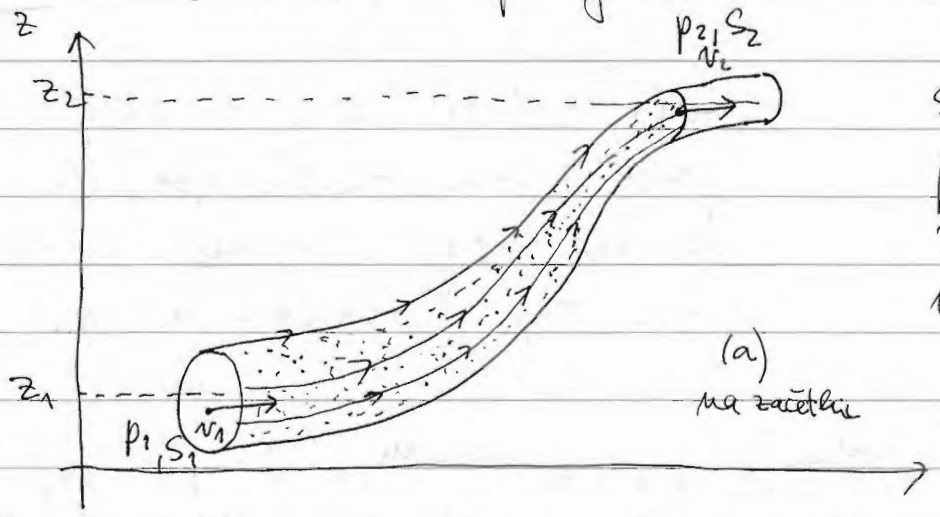
$$v_1 = \frac{\Phi_V}{S_1} = \frac{10\,dm^3}{60s \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{10^3\,cm^3}{6\pi \cdot 1\,cm^2} = 0{,}53\,m/s$$

$$v_2 = \frac{\Phi_V}{S_2} = \frac{10 \cdot 10^3\,cm^3}{60s \cdot \pi \cdot 0{,}25^2\,cm^2} = 8{,}5\,m/s$$

Hitrosti vode so na ozkih mestih znatno povečajo!

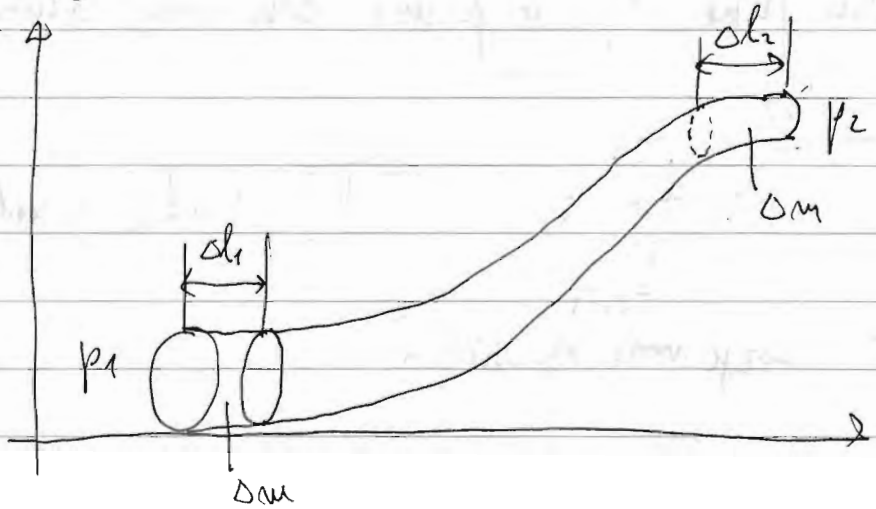
Bernoullijeva enačba

Obravnavamo laminarni in stacionarni tok tekočine. Mislimo si tok tekočine po cevi, ki ima spremenljiv presek ali je na različnih višinah. Opazujemo tok tekočine to tekočevi:



S.... presek cevi
p.... tlak v tekočini
z... višina tekočine
v.... hitrost tekočine

V času Δt se tekočina premakne v spodnjem delu za Δl_1, v zgornjem pa za Δl_2



Zapišimo energijski zakon za tok tekočine:

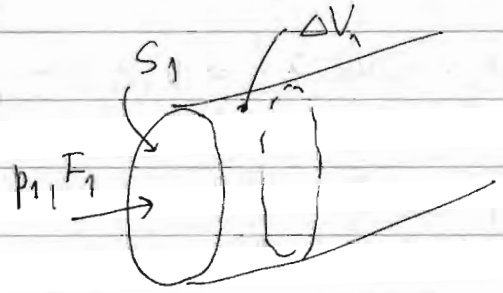
$$W_k - W_k' + W_p - W_p' = A_{zun}$$

Vsota sprememb kinetične in potencialne energije vode je enaka delu zunanjih sil razen sile teže.

$$\frac{1}{2}\Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m \cdot g \cdot z_2 - \Delta m \cdot g \cdot z_1 = A$$

Kolikšno pa je delo zunanjih sil razen sile teže? Sestavljeno je iz dveh prispevkov $A = A_1 + A_2$

Na levem koncu ostala tekočina s tlakom p_1 deluje na tekočino v cevi in jo premakne za Δl_1. To delo je pozitivno

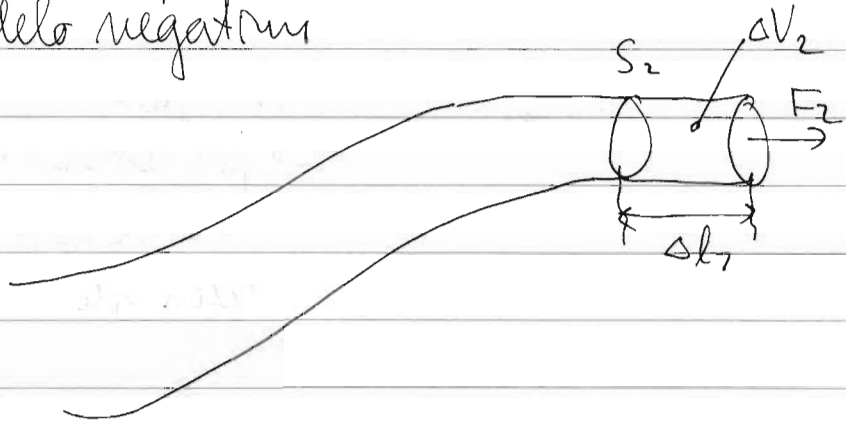


$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

Delo te sile je pozitivno, ker potiska tekočino

$$A_1 = F_1 \cdot \Delta l_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta l_1 = p_1 \cdot \Delta V_1$$

Na desni strani pa tekočina izteka ven in oddaja delo, torej bo to delo negativno



$$A_2 = -F_2 \cdot \Delta l_2 = -p_2 \cdot S_2 \cdot \Delta l_2 = -p_2 \cdot \Delta V_2$$

Celotno delo je torej: $A = A_1 + A_2 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$

Ker je tekočina nestisljiva, je $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ in $A = (p_1 - p_2)\Delta V$
To vstavim v enačbo in dalje

$$\frac{1}{2}\Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g z_2 - \Delta m g z_1 = p_1 \Delta V - p_2 \cdot \Delta V \quad / : \Delta V$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_2 - \rho g z_1 = p_1 - p_2$$

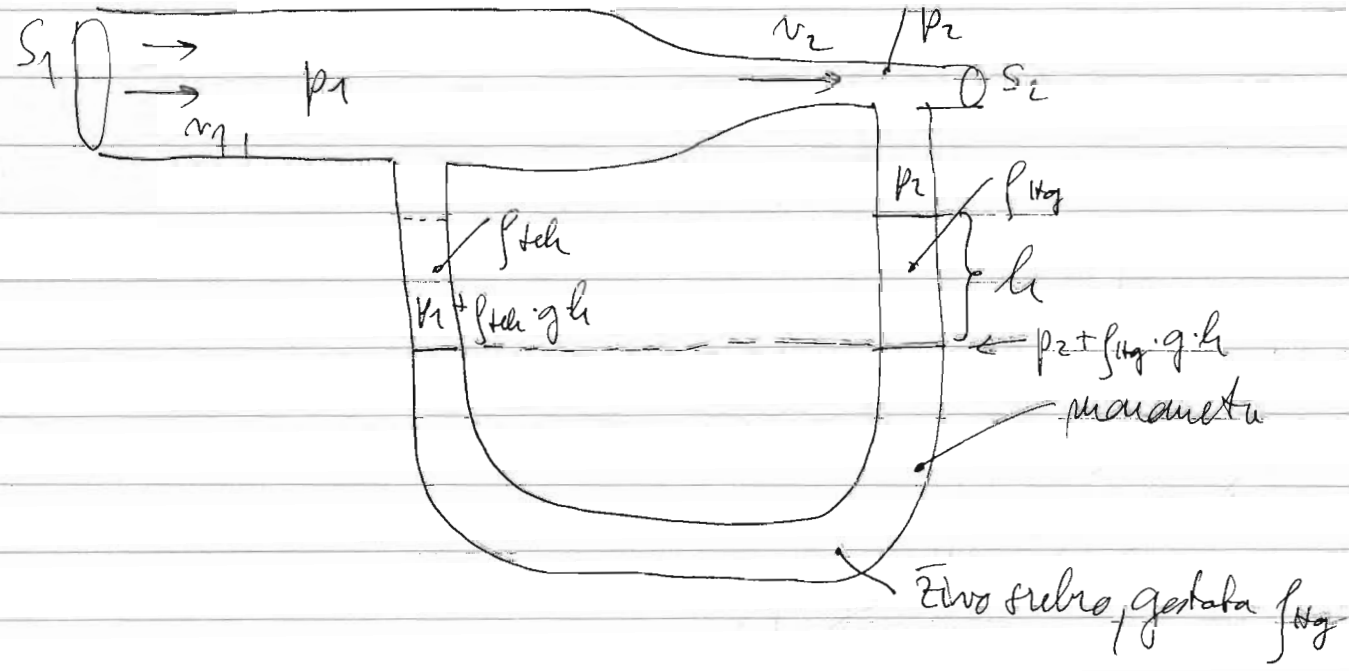
$$\boxed{p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1}$$

Bernoullijeva enačba. Opisuje laminaren in stacionaren tok tekočin. Enačba velja samo približno, ker nismo upoštevali notranjega trenja pri toku tekočine (viskoznost)

Tudi enačbi je pisano tudi $\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{Konst}}$

Trimeri uporabe Bernoulli-jeve enačbe:

a) Venturijeva cev



Ker se v ozkem delu cevi hitrost pretoka poveča, se tlak v tekočini (plinu) zmanjša. Če poznamo preseka S_1 in S_2 ter izmerimo h, lahko določimo hitrost pretoka tekočine:

Za tlake velja $p_1 = p_2 + (\rho_{Hg} - \rho_{tek}) g \cdot h$ $\quad p_2 = p_1 - (\rho_{Hg} - \rho_{tek}) g \cdot h$

Ker je $z_1 = z_2$, velja: $p_2 + \frac{1}{2}\rho_{tek} v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_{tek} v_1^2$ (Bernoulli)

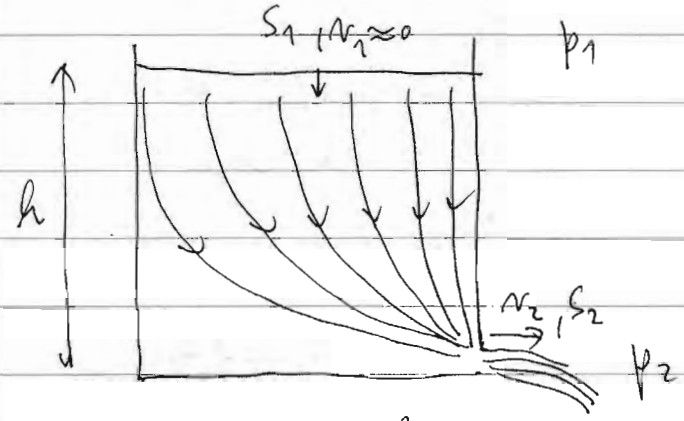
Poleg tega velja kontinuitetna enačba $S_1 v_1 = S_2 v_2$

$$\frac{1}{2}\rho_{tek} v_2^2 + p_1 - \rho_{Hg} g h - p_1 - \frac{1}{2}\rho_{tek} v_2^2 \frac{S_2^2}{S_1^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 \cdot \rho_{tek}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = (\rho_{Hg} - \rho_{tek}) g h$$

$$v_2^2 = \frac{2(\rho_{Hg} - \rho_{tek})\cdot g h}{\rho_{tek}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)} \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho_{tek})\cdot g \cdot h}{\rho_{tek}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}}}$$

2) Iz tekanje ~~posode~~ tekočino iz posode: S kolikšno hitrostjo ~~iz teka iz posode tekočina~~ iz teka skozi luknjo na dnu posode tekočina, če sega v posodi do višine 1m nad luknjo?



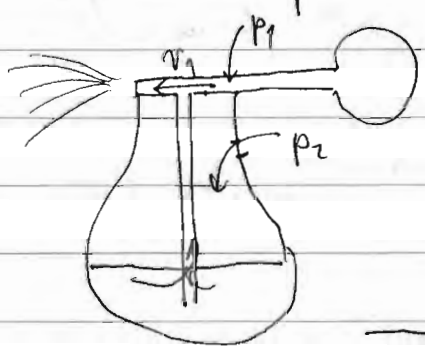
$p_1 \approx p_2$, to je atmosferski tlak!

$$p_1 + \frac{1}{2}\cancel{\rho_t v_1^2}^{\,0} + \rho_t \cdot g \cdot h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \cdot \cancel{0}^{\,0}$$

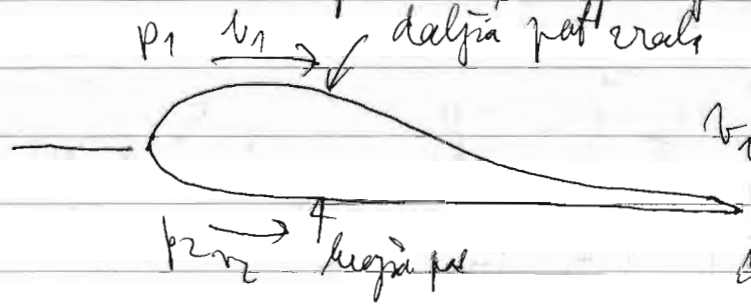
$$\frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2 = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}} \qquad v = 4{,}4\,m/s$$

Hitrost je ista, kot če bi tekočina prosto padala.

Primeri uporabe Bernoullijeve enačbe:



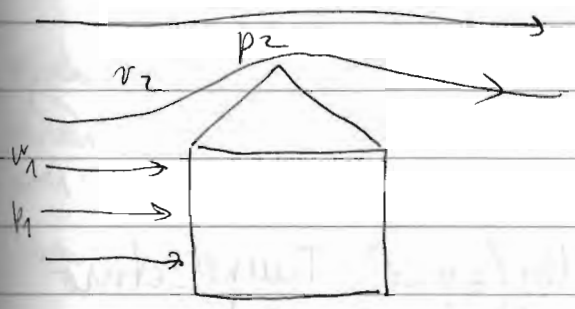
ker je v_1 zelo velika, je p_1 majhen, zato nastane podtlak, ki potegne tekočino v šobo



letalsko krilo

$v_1 > v_2 \Rightarrow p_1 < p$

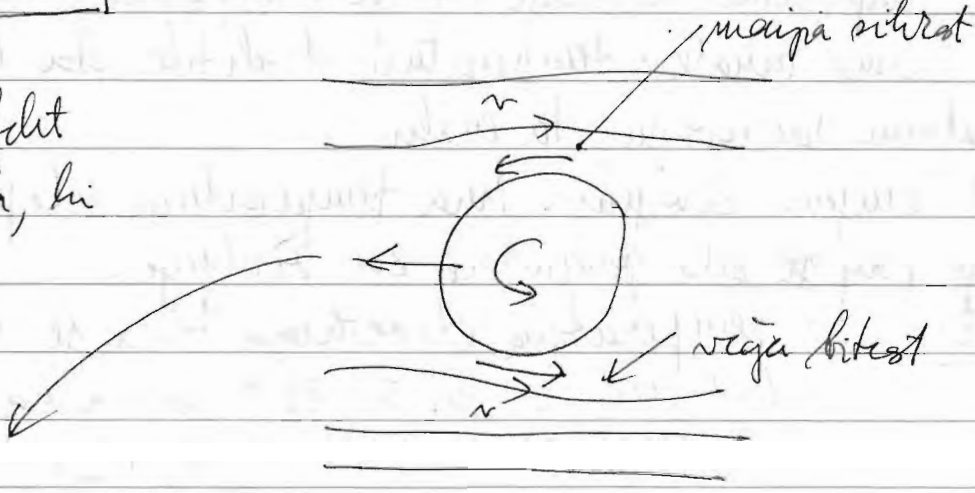
nastane podtlak na zgornjem delu k



$p_2 < p_1$, kerje hitrost večja?

$v_1 < v_2$

Magnusov efekt
vrteča se žogica, ki
se hitro giblje



Zoga zavije z idealne poti →

5. Toplota

5.1. Temperatura

Pojem temperature označuje stanje teles (snovi). Temperaturo definiramo takole: temperaturi dveh teles ~~sta~~ ki sta v toplotnem ravnovesju, sta enaki.

V vsakdanjem življenju ima temperatura zelo pomembno vlogo, saj je zelo pomembna za življenje.

Pomisli: a) temperatura človeškega telesa je stalna na bolj kot 1°C : 36,5 – 36,8 normalna temperatura (0,3°C)

nad 37°C → povišana T, slabo počutje

nad 39°C → nevarno za življenje

b) temperatura človeške okolice: 20°C ± 2°C

težave nad 35°C in pod −10°C

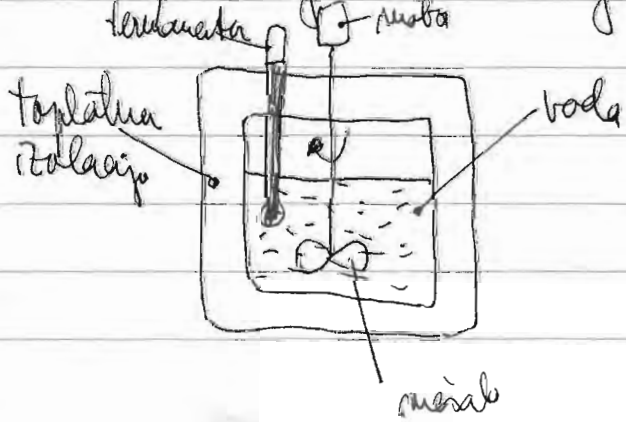
Okolica : 40–50°C razpona

telo : nekaj °C razpona

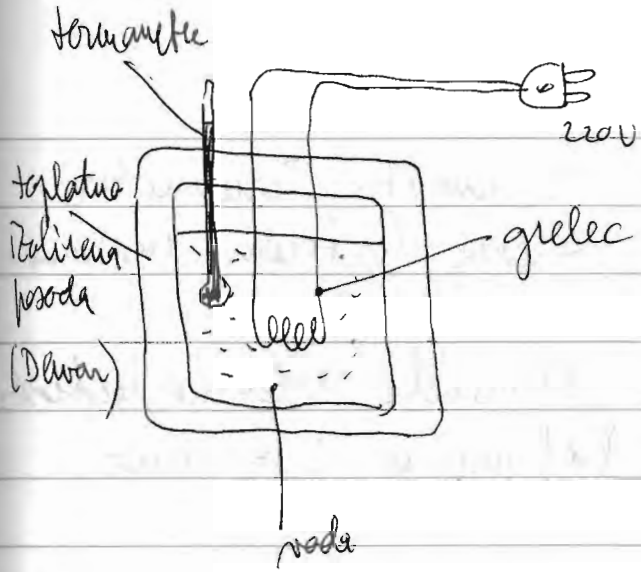
Primerjaj te temperature z ekstremnimi temperaturami, ki jih lahko dosežemo v laboratorijih (10^{-6} K in 10^{3} K)

Kako spreminjamo temperaturo teles:

a) dovajamo zunanje delo, npr. električno ali mehansko

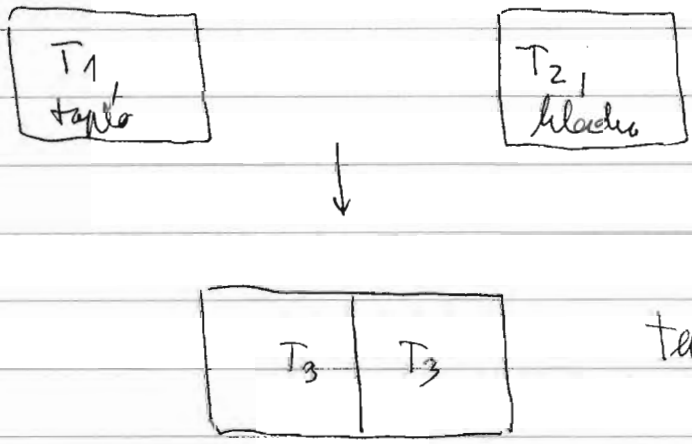


Z mehanskim mešanjem dovajamo mehansko energijo. Zaradi trenja a temperatura vode poviša!



z električnim grelcem dovajamo električno delo. Grelec se segreje in potem toplato oddajavodi. Temperatura vode se poviša

b) Telo damo v stik z drugim telesom z drugačno temperaturo. Opazimo, da se čez čas temperaturi obeh teles izenačita.



T... temperatura [K]

temperaturi se izenačita

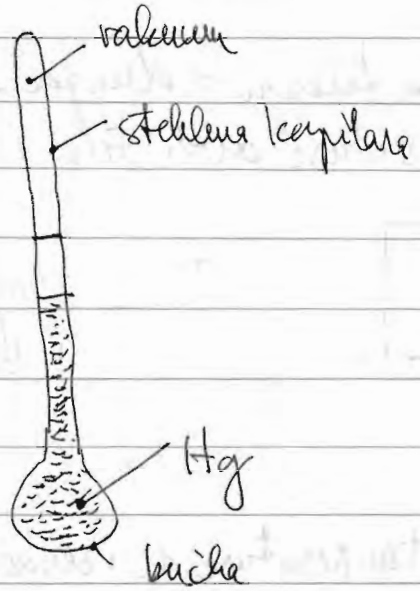
Pravimo, da med telesi prehaja toplota: telo z višjo temperaturo oddaja toplato sistemu z nižjo temperaturo.
Temperaturo teles torej spremenimo na dva načina:

- dovajamo ali odvzamemo delo A
- dovajamo ali odvzemamo toplato Q

A ... delo [J]
Q ... toplota [J]
} obojé ima enako za energijo!

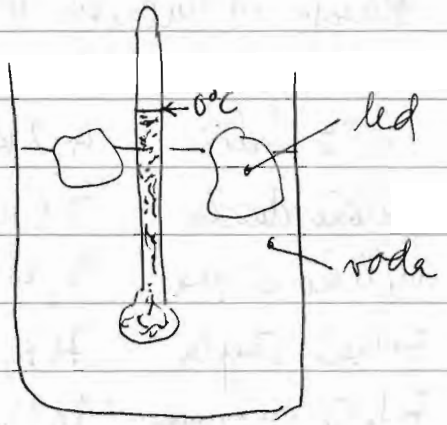
Kako merimo temperaturo teles: s termometri. Termometer mora priti v toplotno ravnovesje s telesom, katerega merimo temperaturo.

Termometri delujejo na principu spremembe dolocene lastnosti s spremembo temperature. Kot primer si oglejmo živosrebrni termometer:

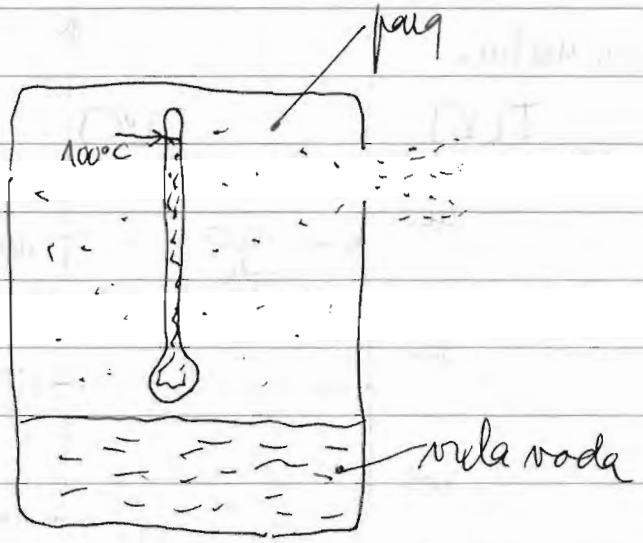


Če živo srebro segrejemo, se poveča volumen, zato se živo srebro povzpne v področje kapilare. Dodaljek živosrebrnega stolpca je sorazmeren s temperaturo. Vendar je potrebno vsak termometer umeriti, t.j. določiti skalo. To naredimo povsod pri dveh znanih (referenčnih) temperaturah. Za področje običajnih temperatur uporabljamo tališče ledu in vrelišče vode pri tlaku 1,01 bar (normalni zračni tlak).

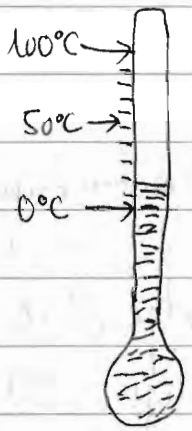
tališče ledu



0°C, označimo do koder sega stolpec

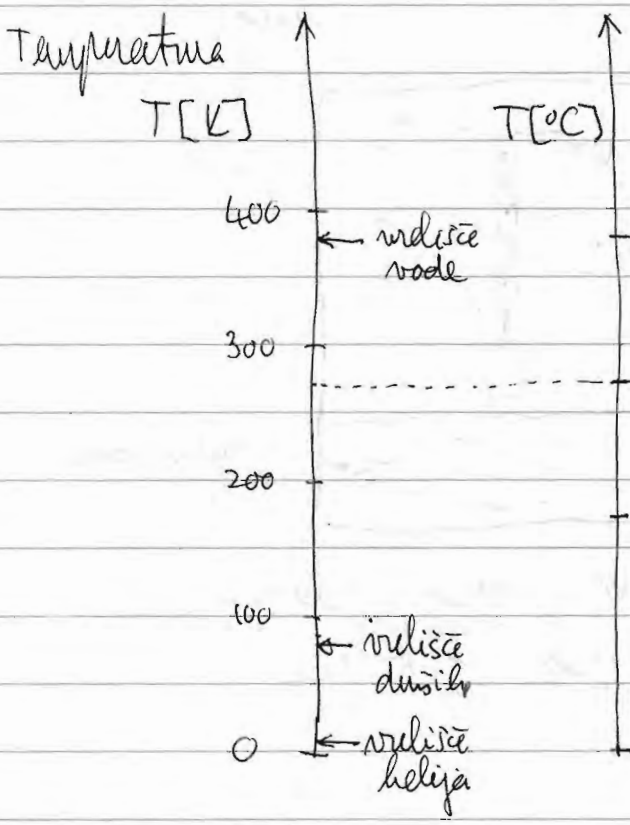


100°C, označimo do kader sega Hg stolpec



Dobimo merjen termometer. Vmesne temperature določimo z linearno razdelitvijo dolžine kapilare med 0°C in 100°C

Dobimo Celzijevo temperaturno skalo. Uporabljamo še drugo, fizikalno temperaturno skalo, t.j. Kelvinova temperaturna skala. Ta skala je absolutna in ima ničlo pri 0K, T=0K

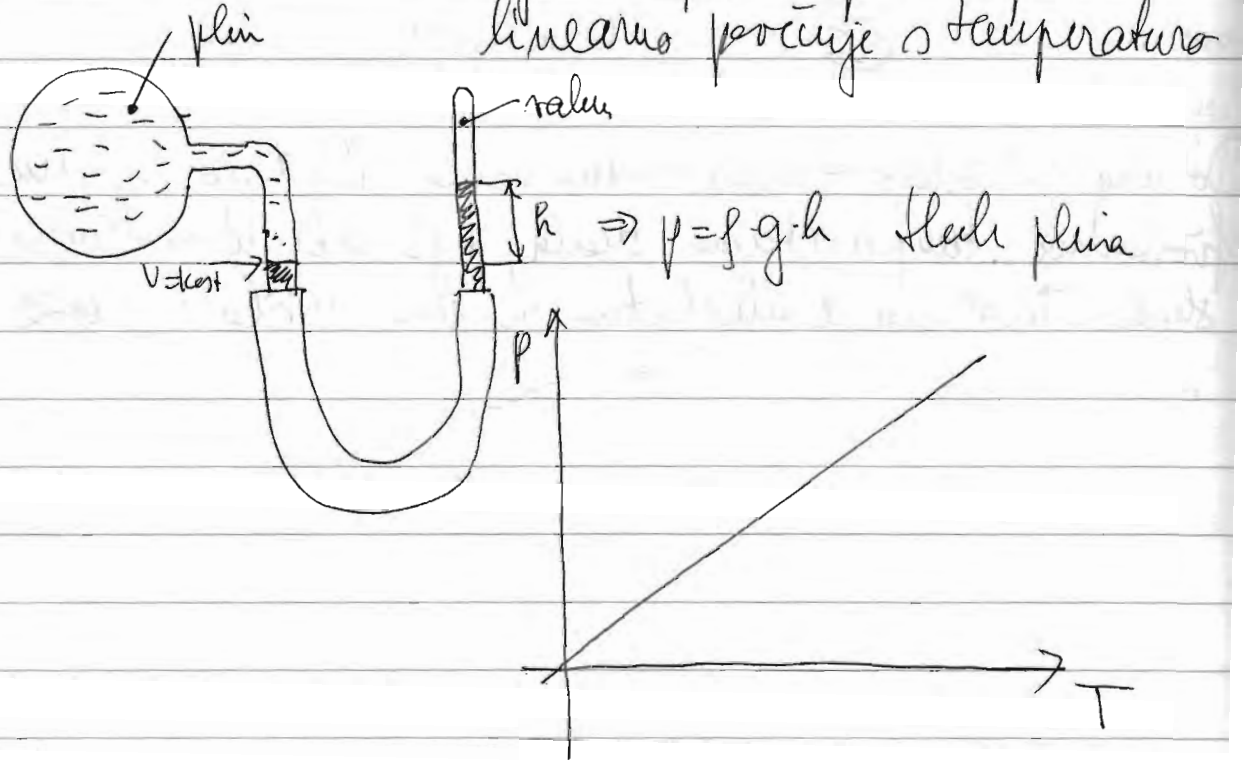


Tehnične temperature, ki služijo za umeritev termometra

vrelišče helija	4,2 K
vrelišče dušika	78 K
vrelišče kisika	90,18 K
tališče živega	717,75 K
tališče antimona	1233,95 K
tališče zlata	1336,15 K

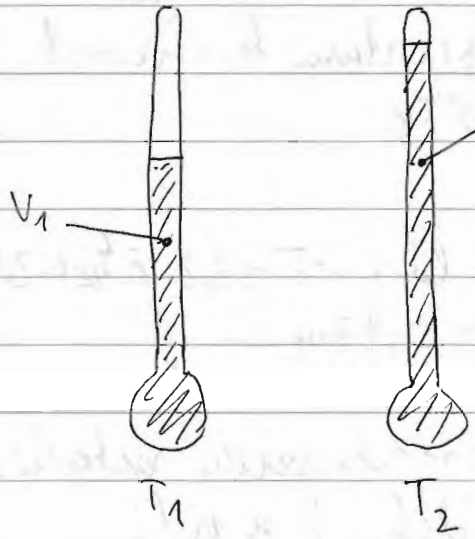
Vrste termometrov

a) plinski termometer: plin držimo pri konstantnem volumnu in merimo pritisk pri različnih T. Ugotovimo, da se pritisk plina linearno povečuje s temperaturo



$p = \rho \cdot g \cdot h$ tlak plina

b) živosrebrni ali alkoholni termometri



$T_2 > T_1$ volumen snovi se poveča s povečano temp.

Velja linearna zveza:

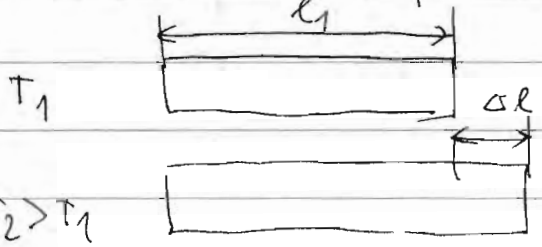
$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \beta \cdot \Delta T$$

ΔV .... sprememba volumna
V_1 .... začetni volumen pri T_1
β ..... temperaturni koeficient prostorninskega raztezka
$\Delta T = T_2 - T_1$ sprememba temperature

Velikosti β:

glicerin $\beta = 4{,}9 \cdot 10^{-4}\ 1/K$
2. srebro $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$

Tri trdnih snovek povzročajo navajamo dolžinski raztezek



$$\frac{\Delta l}{l_1} = \alpha \cdot \Delta T$$

Primeri:

aluminij $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$
steklo $\alpha = 0{,}8 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$

Δl .... sprememba dolžine
l_1 .... začetna dolžina
α .... temperaturni koef. dolžinskega raztezka.

Primer: Izračunaj za kakšno se poveča dolžina železniške tračnice poleti na +50°C, če je dolžina tračnice pozimi na −20°C 20 m. Temperaturni koeficient dolžinskega raztezka je $1{,}2 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$

$\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$

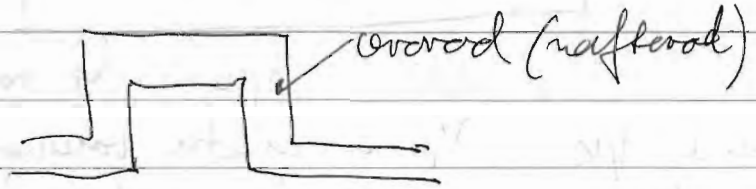
$l_0 = 20\,m$

$\Delta l = ?$

$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \cdot \Delta T \qquad \Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,K^{-1} \cdot 20\,m \cdot 70\,K$

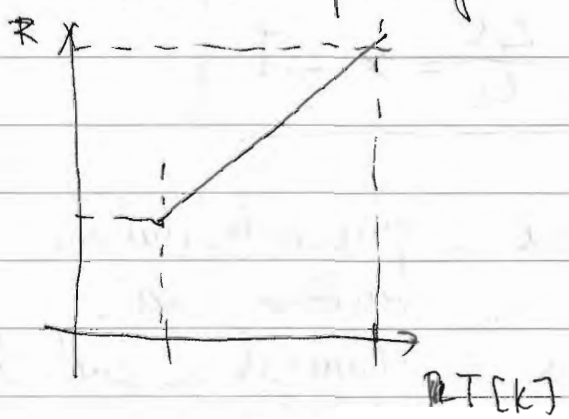
$= 0{,}17\,m$

Tračnica se podaljša za 17 cm!! To so zelo veliki raztezki. Zato mora biti med tračnicami predelek. To se vidi tudi na cevovodih



Moderni termometri:

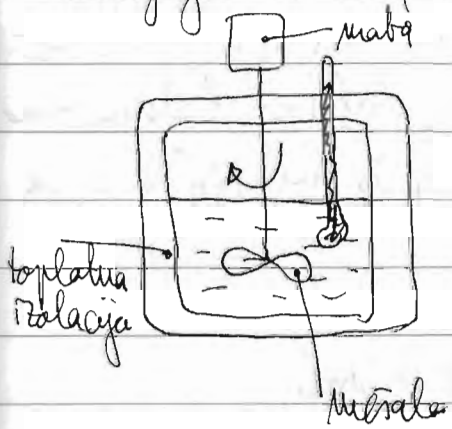
a) uporovni termometer: upor iz platine, s temperaturo se linearno povečuje



5.2. Prvi zakon termodinamike

Notranja energija: spomnimo se poskusov s trki teles, ko smo poznali samo kinetično in potencialno energijo teles. Takrat smo rekli, da za neprožne trke ne velja energijski zakon v taki obliki, kot smo ga poznali. Ugotovili smo, da se pri trku telesa deformirajo in zaradi tega segrejejo. Del energije se torej "porabi" za segrevanje teles. Pravimo, da se poveča notranja energija teles, ki se izrazi v spremembi temperature telesa.

Podobno zasledimo pri Joulovem poskusu. V toplotno izolirani posodi imamo določeno maso vode. Vodo mešamo z mehanskim mešalom in s tem dovajamo zunanje delo. Ker delo dovajamo, se spremeni (poviša) notranja energija telesa (vode)



Ugotovimo, da se voda segreje. Definiramo

$$\boxed{W_n - W_n' = A}$$

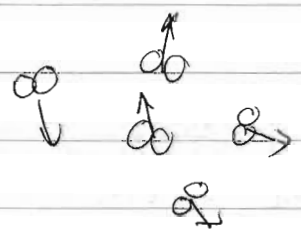
W_n ... notranja energija telesa

A ... delo zunanjih sil

Sprememba notranje energije telesa se odrazi v spremembi temperature telesa. Ugotovimo da je notranja energija telesa enolično določena s temperaturo telesa in tlakom

$$\boxed{W_n(p,T) - W_n'(p',T') = A}$$

Kakšen pomen ima pravzaprav notranja energija? Za razlago se je potrebno spustiti v svet atomov in molekul, iz katerih je sestavljena snov. Če imamo npr. plin, se molekule plina giblejejo v naključnih smereh, vrtijo. Zaradi gibanja molekul imajo določeno kinetično energijo. Seštevek vseh kinetičnih energij plinskih molekul nam da notranjo energijo plina.



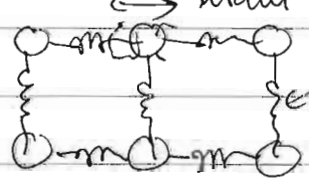
molekule imajo kinetično energijo zaradi gibanja in vrtenja

↓

to sestavlja notranjo energijo plina.

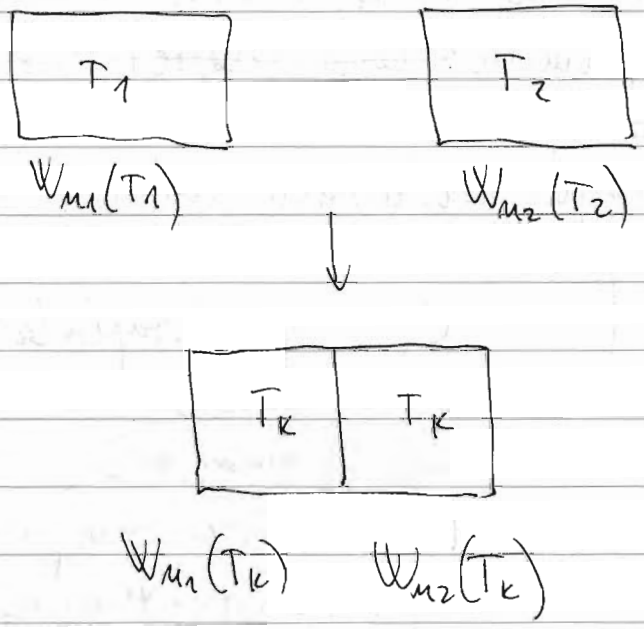
Kaj pa pri kristalih? Tudi tukaj atomi ne mirujejo, temveč nihajo okoli mirovne lege. Torej ~~imajo~~ jih lahko obravnavamo kot majhna nihala → kinetična in elastična energija vseh nihala sestavlja notranjo energijo kristala.

↔ atomi v kristalu nihajo!



sile med atomi v kristalu

Toplota: če damo dve telesi z različnima temperaturama v toplotni stik (tesno se prilegata) se sčasoma toplejše telo ohladi, hladnejše telo pa segreje. To pomeni, da se notranja energija toplejšega telesa zmanjša, hladnejšega pa zveča. Pride torej do prenosa energije s toplejšega na hladnejše telo. Pravimo, da toplejše telo odda toplato hladnejšemu. Toplato označujemo s Q.



Toplejše telo odda toplato: $W_{n1}(T_k) - W_{n1}(T_1) = -Q$

Hladnejše telo sprejme toplato: $W_{n2}(T_k) - W_{n2}(T_2) = Q$

Skupaj notranje sprejmeta notranje oddata toplato!
Zunanja dela in zunanja toplota oba spremenjata notranjo energijo teles:

$$\boxed{W_n - W_n' = A + Q}$$

Od tu pa dobimo prvi zakon termodinamike

$$\boxed{W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_n - W_n' = A + Q}$$

Sprememba polne energije telesa je enaka dovedenem delu in vseh zunanjih sil razen sile teže in dovedeni toplotni.

<u>Specifična toplota</u>: dovedeno toplote izrazimo s spremembo temperature telesa. Razlikovat moramo dva primera: ~~če je telesa dovajamo toplote pri~~

a) telesu dovajamo toplote pri konstantnem volumnu $V = konst$

$$\boxed{m \cdot c_v (T_2 - T_1) = Q}$$

c_v ... specif. toplota pri $V = konst$

m ... masa telesa

T_2 ... končna temperatura

T_1 ... začetna temperatura

Q ... dovedena / odv. toplota

b) telesu dovajamo toplote pri konstantnem tlaku $p = konst$

$$\boxed{m \cdot c_p (T_2 - T_1) = Q}$$

c_p ... spec. topl. pri $p = konst$

Specifični toplotni c_p in c_v sta skoraj enaki pri trdnih snovi, se pa razlikujeta pri plinih. Vedno $c_p > c_v$.

Voda $c_v = 4200\ J/kgK$ zelo velika vrednost, voda je dober skrapnilec toplote.

Specifična talilna toplota: taljenje: iz trdne snovi dobimo z dovajanjem toplote tekočino. Spremeni se torej agregatno stanje. Pri tem se temperatura ne spremeni.

Led, T=0°C → Voda, 0°C

$q_T = 0{,}336\,MJ/kg$ spec. tal. toplota ledu pri 0°C

Notranja porabljena toplota je

$$\boxed{Q = m \cdot q_T}$$

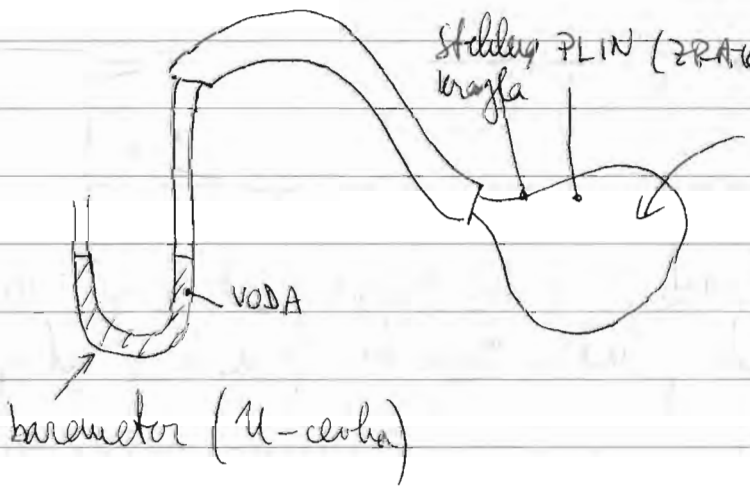
q_T ... specifična talilna toplota
m ... masa
Q ... dovedena toplota

Podobno je pri izparevanju, kjer imamo specifično izparilno toploto: Tu se spremeni iz agregatno stanje iz tekočine v plin. Za to se porabi toplota.

$$\boxed{Q = m \cdot q_i}$$

Voda: $2{,}26\,MJ/kg = q_i$ pri 100°C

Poskus: izparevanje etra, izparilna toplota

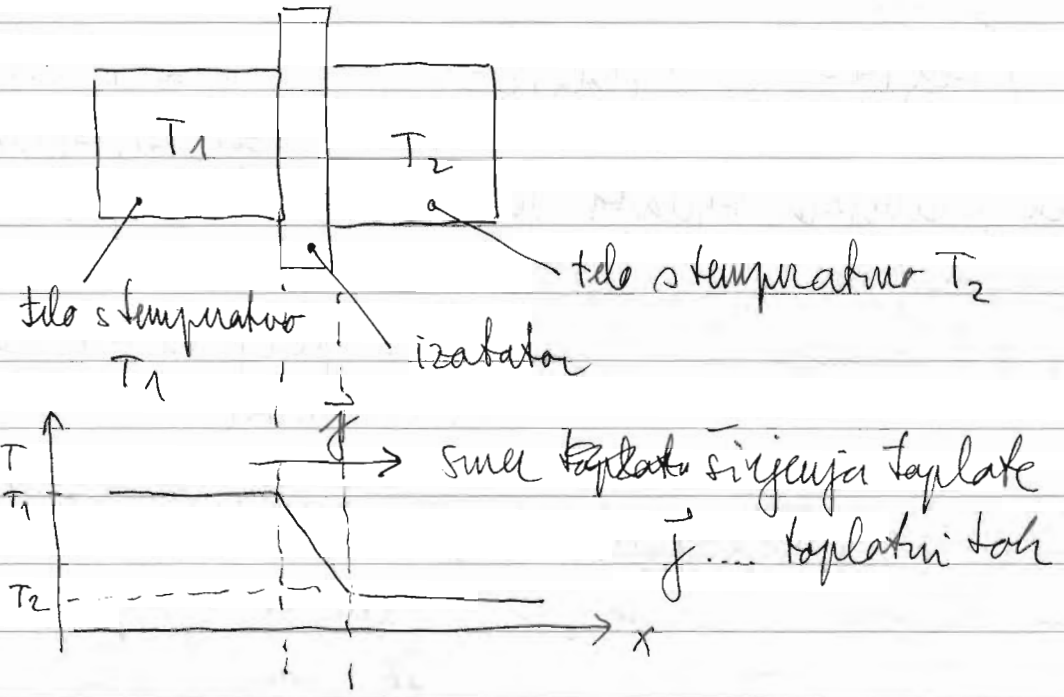


površino polijem z etrom. Ker eter izpareva za to rabi toploto. Kje jo odvzame? Od stekla in plina, ki se ohladi in skrči

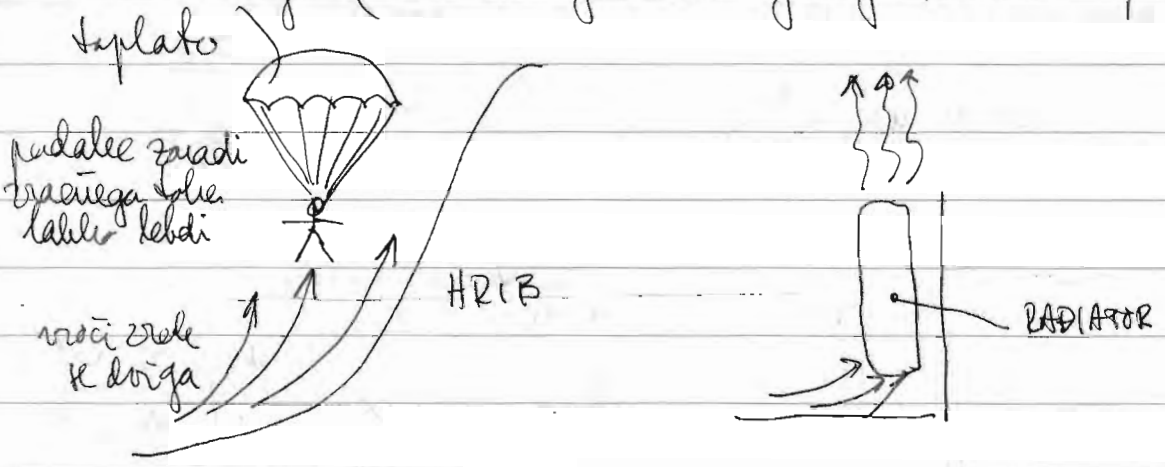
5.3. Razširjanje toplote

Toplota se razširja na tri načine:

a) s prevajanjem preko teles, kar se v termičnem stiku

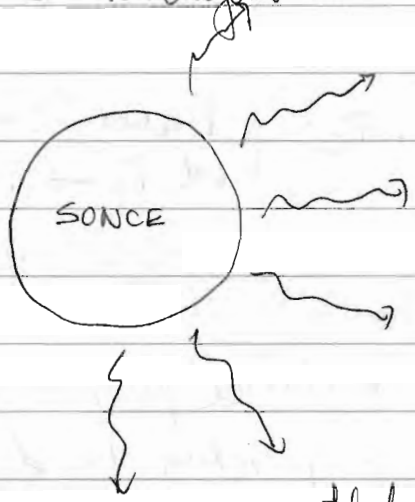


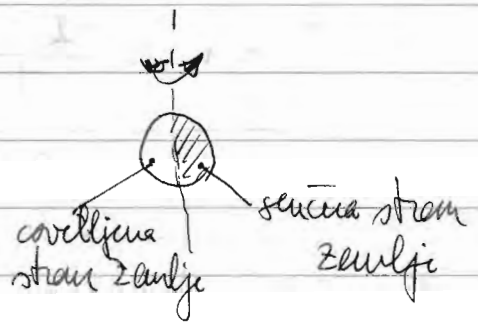
b) s konvekcijo (ena se fizična gibljejo in s tem prenaša toplato



Vroč zrak je redkejši od hladnega, zato je lažji in se dviga. S tem pa tudi prenaša toplato, ji reši s seboj!

c) s sevanjem:



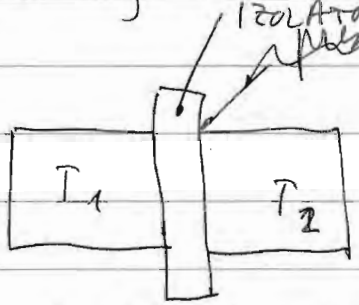


Zemlja se segreva zaradi toplote, ki jo oddaja od Sonca: svetlaba fotonov predstavlja energijo, saj segreva telesa!!!

Obravnavali bomo samo prevajanje toplote preko teles, ki so v termičnem ravnovesju (stiku).

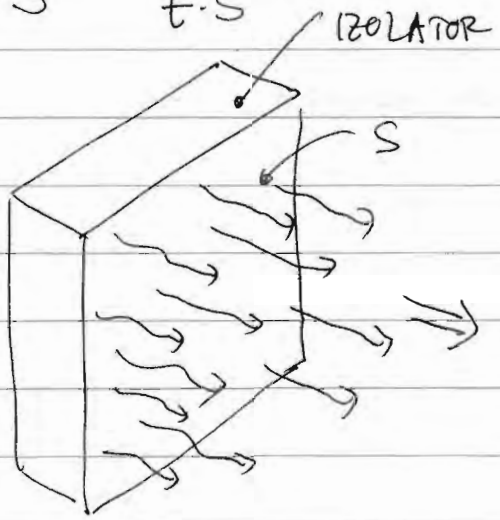
Toplotni tok:

$$j = \frac{P}{S} = \frac{Q}{t \cdot S}$$



$T_1 > T_2$

toplota teče od toplejšega dela (T_1) v hladnejši del (T_2). Vsako sekundo naj gre Q toplote



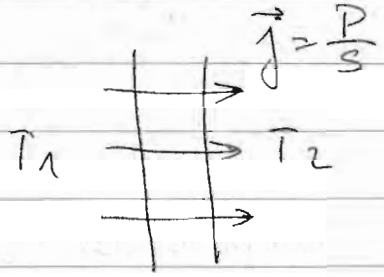
Moč: $P = \frac{Q}{t}$ to je količina toplote Q, ki gre vsako sekundo skozi izolator

Za prevajanje toplote velja

$$\dot{j} = + \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}$$

velikost

$T_1 > T_2$, toplotni tok teče od $T_1 \rightarrow T_2$. To določa smer toka.

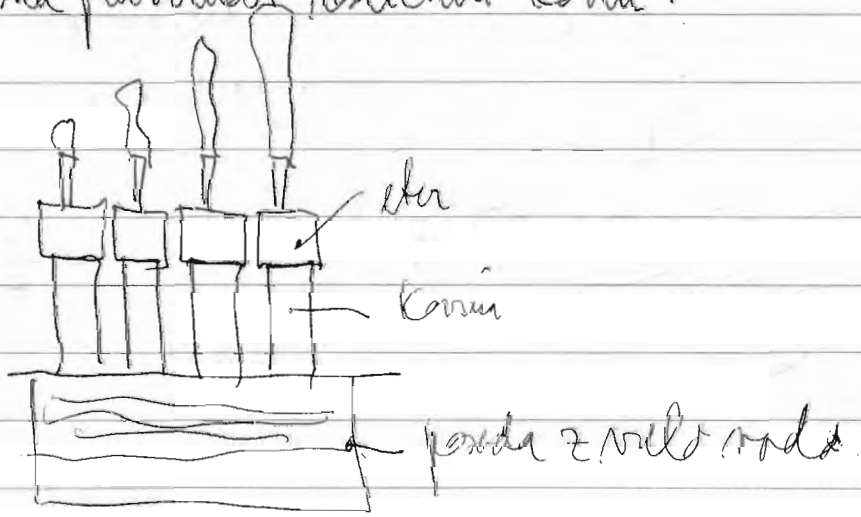


λ .... toplotna prevodnost
T_2 .... temperatura hladnejšega ~~dela~~ telesa
T_1 .... temperatura toplejšega telesa
d .... debelina izolacije

Vrednosti toplotne prevodnosti:

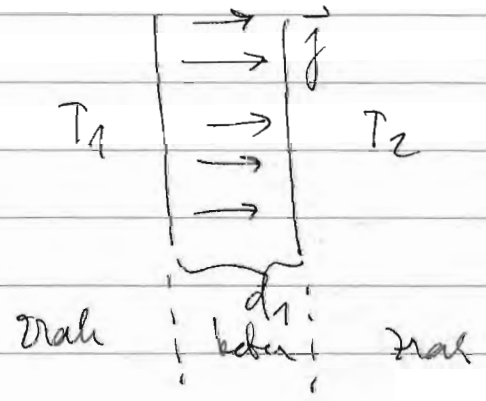
Baker:	390 W/mK
Steklena volna	0,04 W/mK
Beton	0,29 W/mK
Opeka	0,6 W/mK
Zrak	0,025 W/mK ← zelo dober izolator !!
Voda	0,5 W/mK izolator

Poskus: toplotna prevodnost različnih kovin:



Zgled: Izračunaj za koliko odstotkov se zmanjša toplotni tok skozi 10 cm betonsko steno, če na zunanjo stran damo izolacijsko plast debeline 4 cm in s toplotno prevodnostjo 0,03 W/mK. Temperaturna razlika je 20 K, toplotna prevodnost betona je 0,29 W/mK.

Najprej izračunamo toplotni tok skozi betonsko steno.



$T_1 - T_2 = 20K$

$d_1 = 10\,cm$

$d_2 = 4\,cm$

$\lambda_1 = 0{,}29\,W/mK$

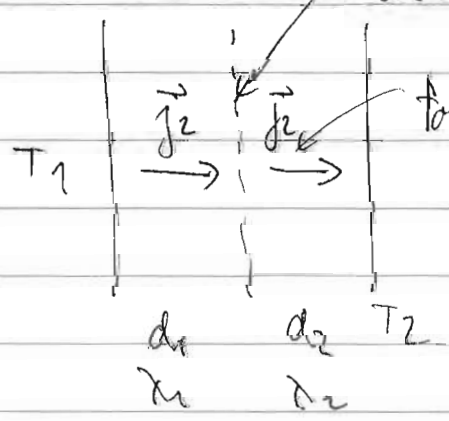
$\lambda_2 = 0{,}03\,W/mK$

$$\frac{\Delta j}{j_1} = ? = \frac{j_1 - j_2}{j_1} = ?$$

$$j = \frac{P}{S} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}$$

$$j_1 = \lambda_1 \frac{T_1 - T_2}{d} = \underline{\underline{58\,W/m^2}}$$

Kako pa je če dam dva izolatorja



toplotni tok je v obeh ~~pa~~ materialih enak!!

$$j = \lambda_1 \frac{T_1 - T_s}{d_1} = \lambda_2 \frac{T_s - T_2}{d_2}$$

$$\lambda_1 d_2 (T_1 - T_s) = \lambda_2 d_1 (T_s - T_2)$$

$$\lambda_1 d_2 T_1 - \lambda_1 d_2 T_s = \lambda_2 d_1 T_s - \lambda_2 d_1 T_2$$

$$-T_s(\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1) = -\lambda_2 d_1 T_2 - \lambda_1 d_2 T_1$$

$$T_s = \frac{\lambda_2 d_1 T_2 + \lambda_1 d_2 T_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1}$$

$$j_2 = \frac{\lambda_2}{d_2}(T_s - T_2) = \frac{\lambda_2}{d_2}\left(\frac{\lambda_2 d_1 T_2 + \lambda_1 d_2 T_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} - T_2\right) =$$

$$= \frac{\lambda_2}{d_2} \cdot \frac{\lambda_2 d_1 T_2 + \lambda_1 d_2 T_1 - \lambda_1 d_2 T_2 - \lambda_2 d_1 T_2}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} =$$

$$= \frac{\lambda_2}{d_2} \cdot \frac{\lambda_1 d_2 (T_1 - T_2)}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1}(T_1 - T_2) = 12\ W/m^2$$

$j_1 = 58\ W/m^2$

$j_2 = 12\ W/m^2$

$\frac{j_2 - j_1}{j_1} = \frac{12 - 58}{58} = -79\%$!!

skoraj 5x manjši toplotni tok!!