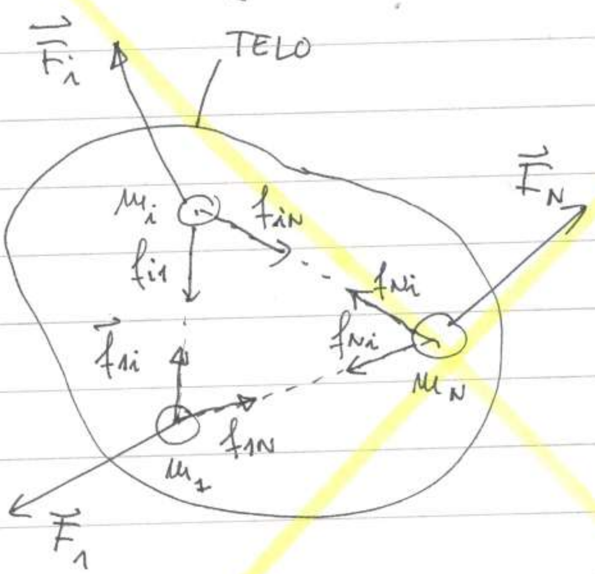
2. MEHANIKA TOGIH TELES

Togo telo je tisto telo, ki je trdno v primerjavi s silami, ki na to telo delujejo.

2.1.1. Težišče togega telesa

Kot primer si mislimo togo telo sestavljeno iz N masnih točk, ki med sebaj delujejo s silami, obenem pa na telo delujejo še zunanje sile



f_{1i} ... sila med prvim in i-tim ~~telesom~~ točko v telesu

f_{1N} ... sila med prvo in N-tno točko v telesu

$\vec F_i$ ... zunanja sila na i-to masno točko

Zapišem gibalno količino N delcev, ki tvorijo telo:

$$\vec G = \sum_{i=1}^{N} \vec G_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec v_i$$

m_i ... masa i-te točke
$\vec v_i$ ... hitrost i-te točke

Izračunam še spremembo gibalne količine:

$$\frac{\Delta \vec G}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{\Delta \vec v_i}{\Delta t}$$

to je torej celotna gibalna količina

Poglejmo sedaj podrobneje, ali notranje sile lahko prispevajo k spremembi gibalne količine

Gibalna količina i-te točke : $\vec{G}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$

$$\frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\vec{f}_{ki}}_{\text{notranje sile}} + \vec{F}_i$$

To je po izrekih o gibalni količini

zunanje sile na i-to točko

Sedaj to seštejem po vseh točkah

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{ki} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

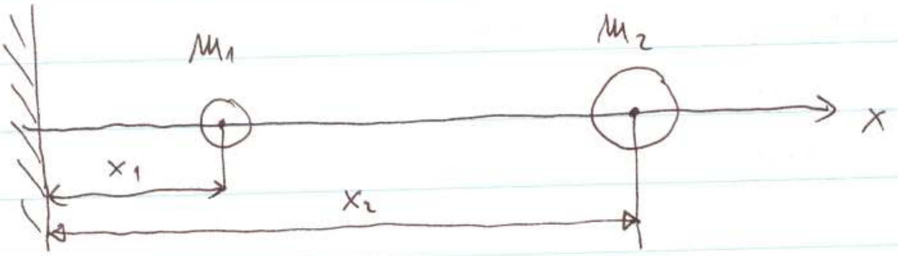
ta vsota je enaka 0, ker nastopajo sile v parih, naprimer $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$, zato se vse uniči. Notranje sile ne morejo prispevati k spremembi gibalne količine

$$\boxed{\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$$

Vidimo, da je s stališča gibalne količine gibanje togega telesa podobno gibanju točkastega telesa.
To poudarimo izraziti tako, da definiramo težišče, t.j. masno središče telesa:

2.1.1. Težišče togega telesa

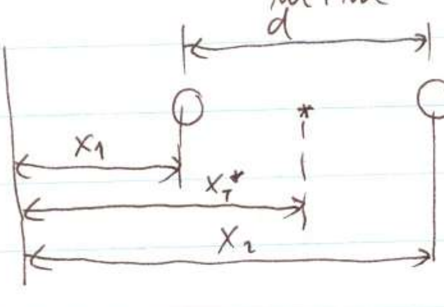
Vzemimo primer dveh teles z maso m_1 in m_2, ki sta postavljeni v razdalji x_1 in x_2 od izhodišča.
Definiram težišče dveh teles:



$$\boxed{x_T^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$$

Poglejmo, kje je težišče dveh enakih teles, ki sta v razdalji d; $m_1 = m_2 = m$

$$x_T^* = \frac{m x_1 + m(x_1 + d)}{m + m} = \frac{2 m x_1 + m d}{2m} = x_1 + \frac{d}{2}$$



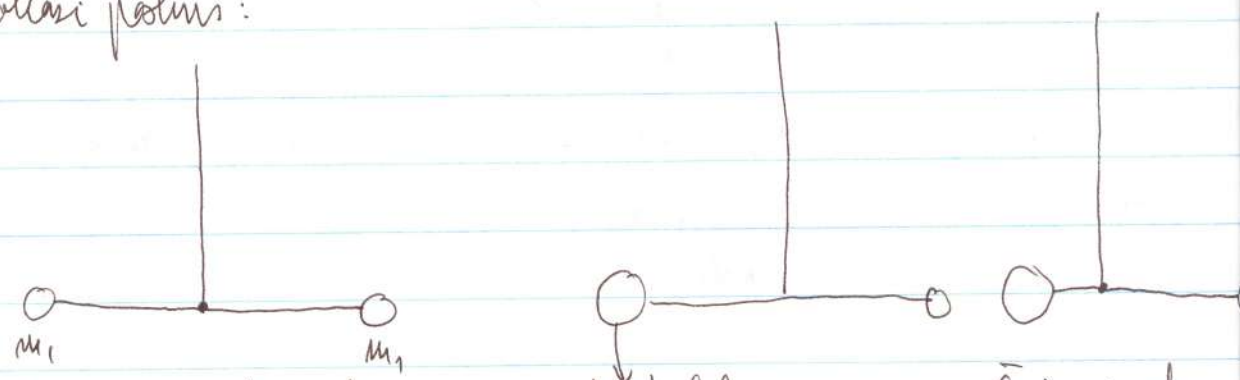
težišče je na 1/2 razdalje obeh mas, ki sta enaki.

Kaj pa, če sta masi različni? Vzemimo $m_2 = 2m_1$:

$$x_T^* = \frac{m_1 x_1 + 2m_1(x_1 + d)}{m_1 + 2m_1} = \frac{m_1 x_1 + 2m_1 x_1 + 2m_1 d}{3m_1} = x_1 + \frac{2}{3} d$$

Težišče se je premaknilo k težji masi m_2!

Pokaži poskus:

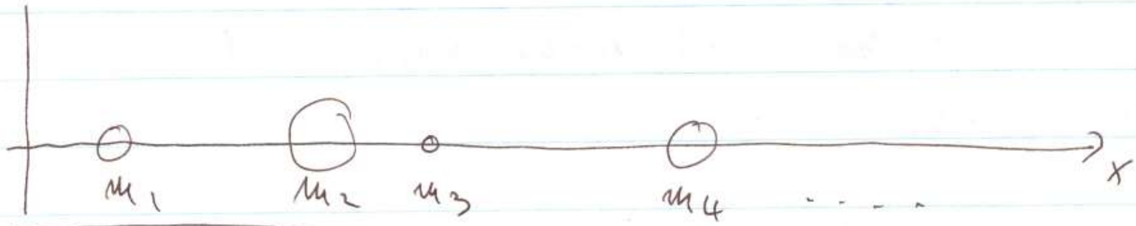


Če sta masi enaki, potem se zadeva ne vrti, če je vrvica pripeta na sredini, torej v težišču

Nestabilno

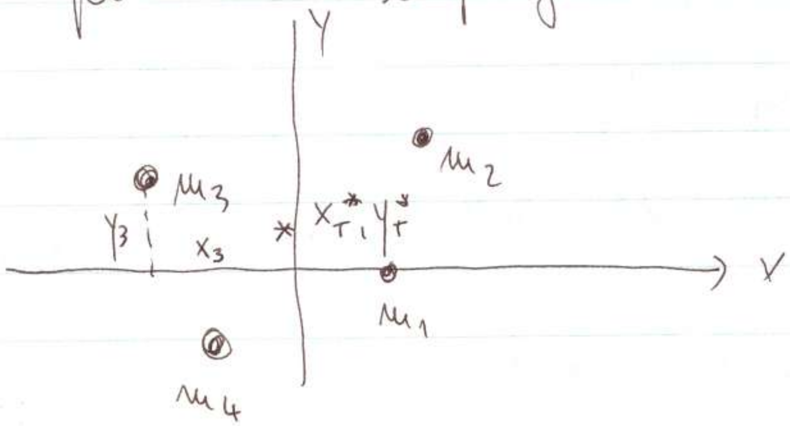
Če je pripeto v težišču, se ne vrti

Definicijo težišča posplošimo na N mas, ki so porazdeljene po osi x:



$$\boxed{x_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

Mase pa so lahko razporejene v x-y ravnini:



Težišče v dveh dimenzijah je določeno z vektorjem

$$\vec{r}_T^* = (x_T^*, y_T^*) \qquad x_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

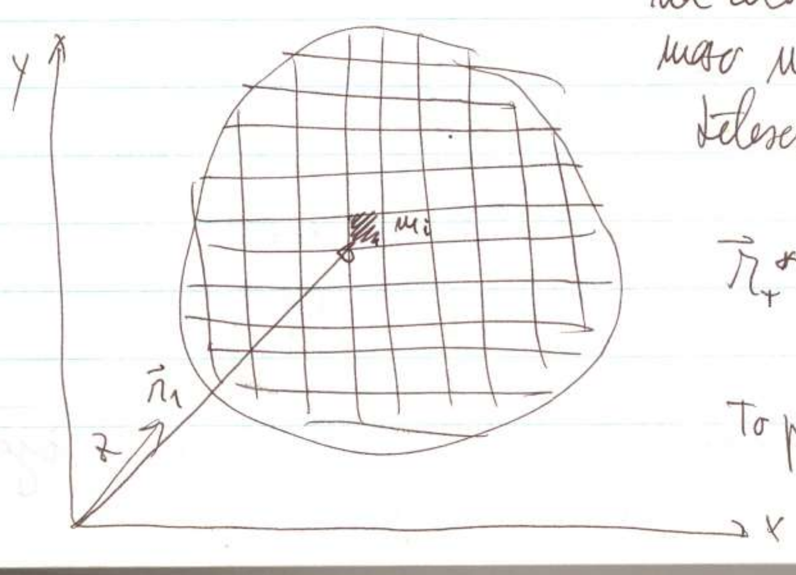
$$y_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

V treh dimenzijah pa dobimo še z-komponento težišča

$$\vec{r}_T^* = (x_T^*, y_T^*, z_T^*) \qquad z_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ali krajši: $\boxed{\vec{r}_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$ definicija težišča

Tako v bistvu poiščemo težišče togega telesa. Telo razdelimo na zelo drobne dele z maso m_i. Težišče togega telesa je potem



$$\vec{r}_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}$$

To preide v integral

$$\vec{r}_T^* = \frac{\int dV \, \vec{r}_i \, \rho(\vec{r})}{M}$$

Težišče je pomembno pri gibanju togih teles. Gibanje togega telesa namreč lahko razstavimo na vsoto gibanja težišča (translatorno gib) in vrtenja okoli težišča.

2.1.2. Izrek o gibanju težišča togega telesa:

Izhajam iz definicije težišča; vzamem samo

$$\vec{r}_T^* = (x_T^*, y_T^*, z_T^*) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

skupna masa teles

Sprememba $\frac{\Delta \vec{r}_T^*}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}}{M}$ če so vse mase po velikosti konstantne.

To pa je hitrost težišča:

$$\vec{v}_T^* = \frac{\Delta \vec{r}_T^*}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i}{M}$$

Pogledam spremembo hitrosti v časovni enoti:

$$\frac{\Delta \vec{v}_T^*}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}}{M}$$

To pa je pospešek težišča $\vec{a}_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M} \quad / \cdot M$

$$M \cdot \vec{a}_T^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{ZUN}$$

$\vec{F}_i$ sila na i-to telo

Dobimo zakon o gibanju težišča $\boxed{M \cdot \vec{a}_T^* = \vec{F}_{ZUN}}$

Togo telo se giblje tako, kot da bi bila vsa njegova masa zbrana v težišču telesa.

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = m_t \cdot \frac{\Delta v^*}{\Delta t}$$

uvedemo pojem hitrosti težišča v^*

m_t .... skupna masa telesa

Torej

$$m_t \cdot \frac{\Delta v^*}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \vec{v}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i = \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \frac{\Delta \vec{r}^*}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}$$

$\vec{r}_i$ ... koordinata i-te točke

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \vec{r}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\boxed{\vec{r}^* = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}$$

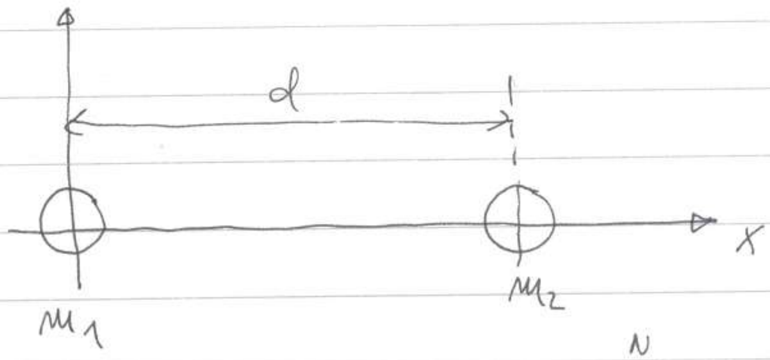
Tako se izračuna težišče telesa

To je seveda treba računati po koordinatah!

Primer izračuna težišča: dve telesi z masama po 7 kg in 4 kg sta med seboj povezani z zelo lahko palico v razmiku 1,5 m. V kateri točki je težišče?

$m_1 = 7\,kg$
$m_2 = 4\,kg$
$d = 1{,}5\,m$

$x^* = ?$



$$x^* = \frac{1}{m_t} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^*$$ to pride iz $$\vec{r}^* = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^*$$

$m_t = \sum_i m_i$ masa telesa

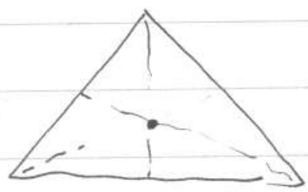
$$x^* = \frac{1}{m_1+m_2} \cdot \sum_{i=1}^{2} m_i \cdot x_i = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot d\right) = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot d =$$

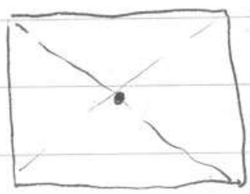
$$= \frac{4}{11} \cdot 1{,}5\,m = \underline{\underline{0{,}54\,m}}$$

Težišče telesa je v razdalji 0,54 m od težjega telesa

Primeri težišč geometrijskih teles:

trikotnik:





pravokotnik

Slovenija

2.1.2. Izrek o gibanju težišča togega telesa

Ugotovili smo, da je za sistem z N točkami gibalna količina

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}^*$$

m_i .... masa i-te točke
$\vec{v}_i$ .... hitrost i-te točke

Prav tako smo ugotovili, da se sistem masnih točk pod vplivom zunanjih sil giblje tako, kot da bi bilo to točkasto telo, postavljeno v težišče sistema:

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i = m_t \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t}$$

m_t .... masa telesa (vsota vseh mas v sistem telesa)
$\vec{v}^*$ .... hitrost težišča

To pa je že izrek o gibanju težišča:
težišče telesa se pod vplivom zunanjih sil giblje kot točkasto telo, v katerem bi bila zbrana vsa masa telesa in na katerega deluje vsota vseh zunanjih sil. To pomeni, da se težišče telesa giblje s pospeškom, ki je sorazmeren z vsoto ~~od~~ vseh zunanjih sil!

$$\vec{F}\Delta t = \Delta \vec{G} = m_t \cdot \Delta \vec{v}^* \rightarrow \boxed{\vec{F} = m_t \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t} = m_t \cdot \vec{a}^*}$$

2. Newtonov zakon torej velja tudi za gibanje težišča togega telesa.

Posledice izreka o gibanju težišča togega telesa:

1. Izrek o gibalni količini togega telesa: sunek zunanjih sil je enak spremembi gibalne količine težišča togega telesa:

$$\vec{F}\cdot\Delta t = m\cdot\Delta\vec{v}^*$$

2. Izrek o potencialni energiji togega telesa:
Delo zunanjih sil razen sile teže je enako spremembi kinetične ~~in potencialne~~ energije telesa in potencialne energije težišča togega telesa

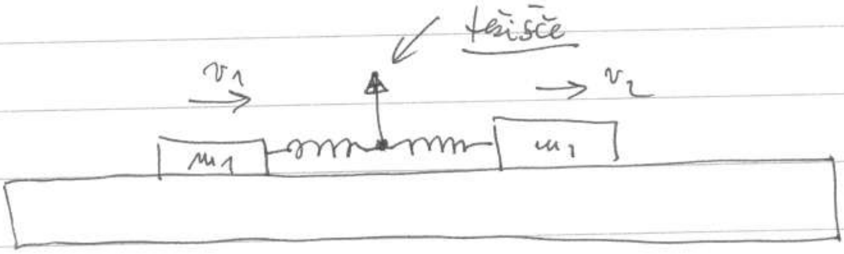
$$A_{\text{ostale zun}} = W_k - W_k' + W_p - W_p'$$

Potencialna energija togega telesa: $W_p = m\cdot g\cdot h^*$

h^* .... višina težišča tele

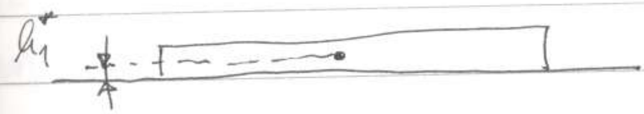
Primer 1: met toge palice s kroglo na eni strani. Palico vržem tako, da se vrti v zraku. Obenem se vidi, da se težišče, ki je označeno, giblje kot točkasto telo → po paraboli:

Primer 2: Dva vozička na zračni klopi sta opeta z dvema vzmetema. Med njima je kazalec, ki kaže gibanje skupnega težišča. Ko vozička sunem, da se oba premakneta. Vozička med seboj nihata, vidi pa se da težišče potuje z enakomerno hitrostjo.

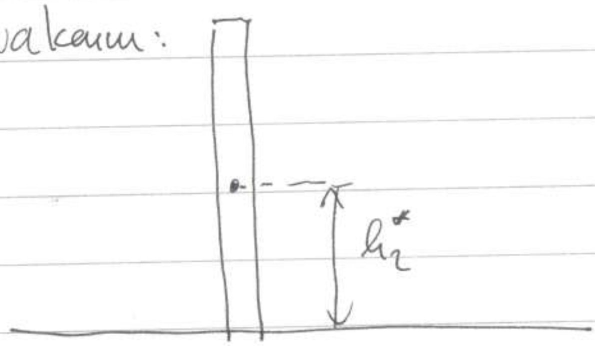


Primer 3: Koliko dela opravimo, če enakomerno debel drog s premerom 20 cm, maso 200 kg in dolžino 8 m postavimo iz vodoravne v navpično lego?

Na začetku:



Na koncu:



$$A = W_p - W_p' = m \cdot g \cdot (h_2^* - h_1^*) = 200\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2\,(4\,m - 0.1\,m) =$$
$$= \underline{\underline{7644\,J}}$$

2.2. Vrtenje togega telesa

2.2.1. Enakomerno pospešeno kroženje t.t.

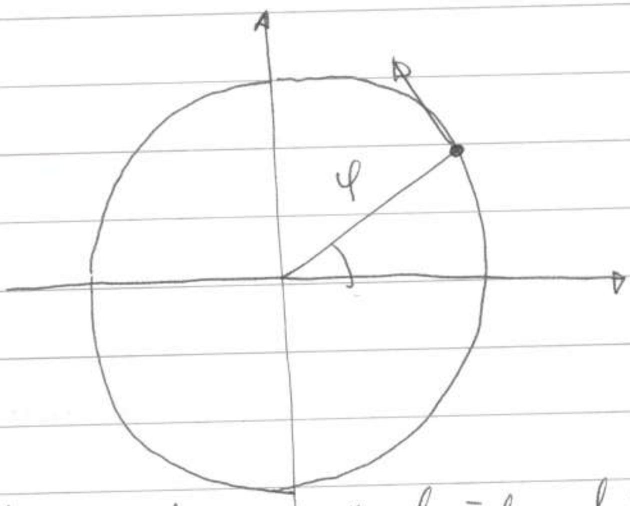
Imejmo točkasto telo z maso m, ki kroži v stalni razdalji r od središča kroženja. Kroženje je enakomerno pospešeno, če se kotna hitrost ω ~~pe~~ povečuje premo sorazmerno s časom:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \omega' + \alpha \cdot t \\ \alpha &= \frac{\omega - \omega'}{t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \end{aligned}}$$

ω'.... začetna kotna hitrost

α.... kotni pospešek

$[1/s^2]$ enota za kotni pospešek

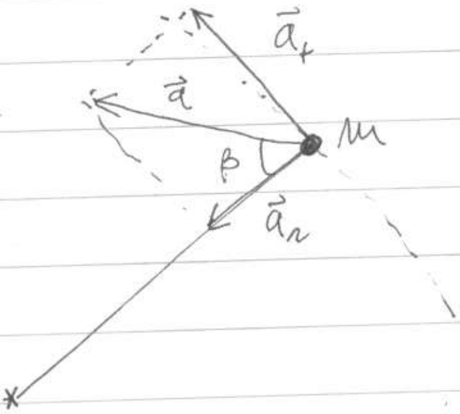


Kaj se dogaja s krožilno hitrostjo pri enakomerno pospešenem kroženju?

$$\boxed{v = \omega \cdot r = \omega' \cdot r + \alpha \cdot r \cdot t = v' + a_t \cdot t} \quad \boxed{a_t = \alpha \cdot r}$$

tangentni pospešek

Pri enakomerno pospešenem kroženju t.t. imamo torej dva pospeška: radialni in tangentni, ki sta oba vektorja in se zato seštevita v skupni vektor pospeška:



Velja: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

Velikost celotnega pospeška:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_r|^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2 r^2 + (r\omega^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 r^2 + r^2\omega^4}$$

Primer: točkasto telo z maso 0,5 kg kroži po krožnici z radijem 1m z enakomerno kotno hitrostjo, tako da opravi en obhod v 2s. V nekem trenutku začne enakomerno pospeševati s pospeškom $3/s^2$. Izračunaj velikost in smer ~~pospe~~ celotnega pospeška ~~ofa~~ v trenutku začetka pospeševanja!

$m = 0,5\,kg$

$r = 1\,m$

$t_0 = 2\,s \Rightarrow$ opravi kot $2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = 3,14/s$

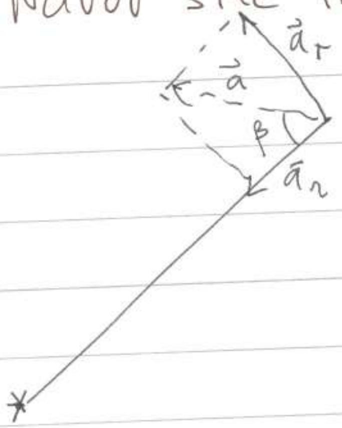
$\alpha = 3/s^2$

$|\vec{a}| = ?$

$\sphericalangle\beta = ?$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2 r^2 + r^2\omega_0^4} = 10,3\,m/s^2$$

2.2.7. Navor sile in vztrajnostni moment



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_r}{a_t} = \frac{r\cdot\omega^2}{r\cdot\alpha} = \frac{\omega^2}{\alpha} = 3{,}28$$

$$\beta = \operatorname{arctg} 3{,}28 = \underline{73^\circ}$$

Sedaj smo spoznali opis gibanja, nismo pa povedali zakaj točkasto telo kroži enakomerno pospešeno.

Vzemimo zopet telo z maso m, ki kroži v stalni razdalji r, ki je ni mogoče spreminjati (togo). Na telo naj deluje zunanja sila $\vec{F}$, kot je prikazano na spodnji sliki:

Zunanja sila naj deluje pod kotom δ glede na zveznico s središčem kroženja. To silo razstavim na radialno in tangentno komponento:

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_r$$

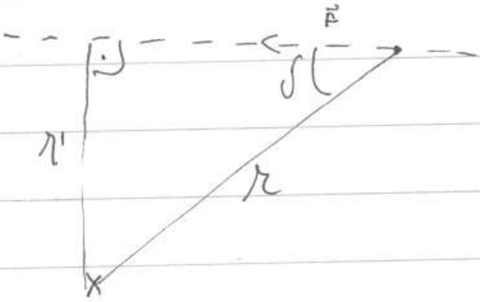
Radialna sila $\vec{F}_r$, ki ima smer proti središču kroženja nima vpliva na kotni pospešek gibanje telesa, saj se razdalja ne more spremeniti. Kaj pa tangentna komponenta $\vec{F}_t$? Ta komponenta sile povzroči tangentno komponento hitrosti.

$$F_t = F \cdot \sin\delta = m \cdot a_t = m \cdot \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = m \cdot r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = m \cdot r \cdot \alpha$$

$$F \cdot \sin\delta = m \cdot r \cdot \alpha \qquad / \cdot r$$

$$F \cdot r \cdot \sin\delta = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Poglejmo, kaj pomeni $r \cdot \sin\delta$



$\sin\delta = \frac{r'}{r} \Rightarrow$

$r' = r \cdot \sin\delta$

$r' = r \cdot \sin\delta$ imenujemo ročica sile. To je oddaljenost premice, v kateri katere deluje sila $\vec{F}$, od središča kroženja.

Enačbo sedaj zapišemo

$$F \cdot r' = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Definiramo: navor sile glede na dano os

$$\boxed{M = F \cdot r'}$$

Navor je produkt sile in njene ročice glede na to os

Definiramo: vztrajnostni moment točkastega telesa

$$\boxed{J = m \cdot r^2}$$

Vztrajnostni moment točkastega telesa je enak produktu mase telesa in kvadrata radija kroženja (razdalje od osi).

~~Vo~~ Enakomerno pospešeno kroženje pod vplivom stalnega ~~navora~~ sile torej zapišemo z navorom sile, vztrajnostnim momentom in kotnim pospeškom:

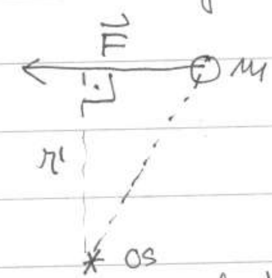
$$\boxed{M = J \cdot \alpha}$$

Navor zunanje sile je enak produktu vztrajnostnega momenta in kotnega pospeška. Izraz velja splošno, ne samo za točkasto telo. Za druga telesa je potrebno vztrajnostne momente izračunati.
Če je navor konstanten, se telo začne vrteti enakomerno pospešeno

Za točkasto telo smo izpeljali zvezo med navorom zunanje sile in kotnim pospeškom

$$M = J \cdot \alpha$$

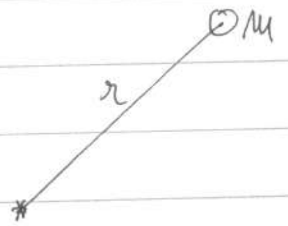
Pri tem je M navor zunanje sile:



$$M = F \cdot r'$$

J pa je vztrajnostni moment točkastega telesa

$$J = m \cdot r^2$$



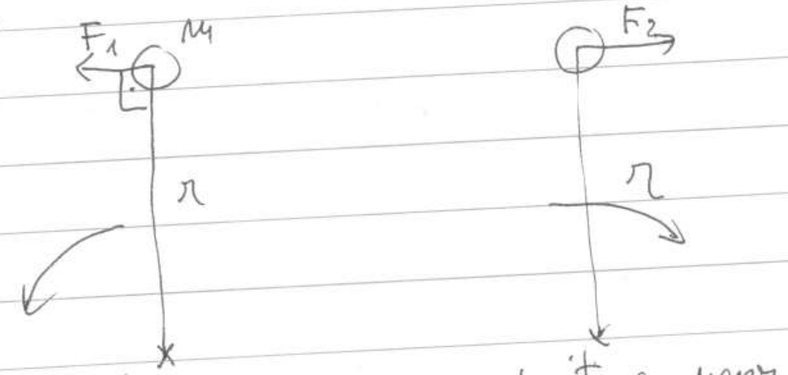
Pod vplivom stalnega navora se točkasto telo torej vrti okoli stalne osi enakomerno pospešeno. Pomembno je še to, da navor suče telo lahko v smeri urinega kazalca ali pa v nasprotni smeri. Ločiti moramo torej smer sukanja navora, tako da se dogovorimo, katera smer je pozitivna in katera negativna.

nasprotno smeri urinega kazalca

smer urinega kazalca

Pomembno je to, da se navori seštevajo. Če imam naprimer 2 sili, ki vrtita telo, se njuna navora seštejeta. Pri seštevanju upoštevam smer navora, tako da enega štejem pozitivno, drugega negativno

Dogovor:



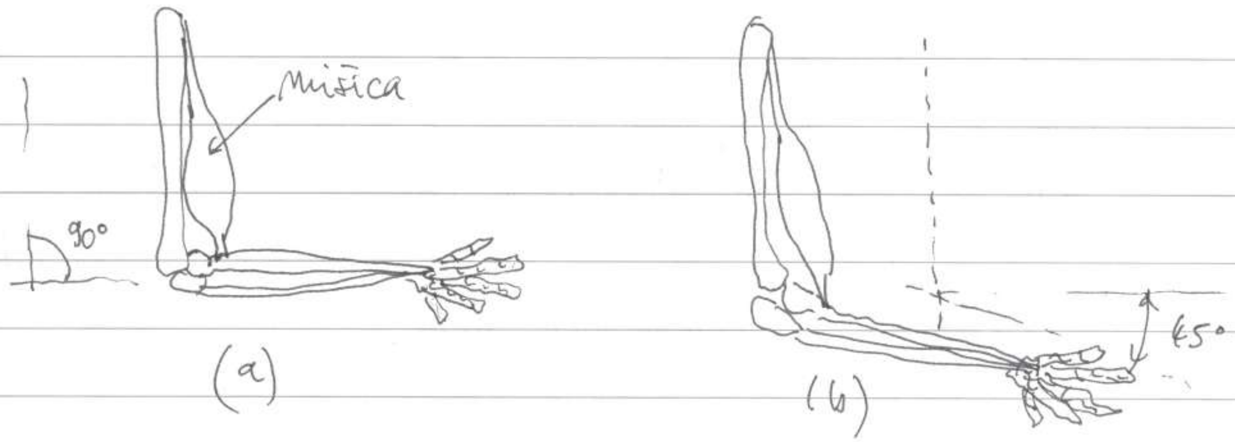
negativen navor

pozitiven navor

$M = + F_1 \cdot r$

$M = + F_2 \cdot r$

Primer 1: Izračunaj navor na mišico ~~na~~ človeške roke, ki potiska s silo 700N, njeno prijemališče pa je 5cm od sklepa. V prvem primeru je ročica sile pravokotna, v drugem primeru pa pod kotom 45°, kot je prikazano na sliki.



Poglejmo kako bi to narisali drugače

$$\cos 45° = \frac{r_\perp}{r}$$

$$r_\perp = r \cdot \cos 45°$$

(b)

$r = 0{,}05\,m$
$F = 700\,N$

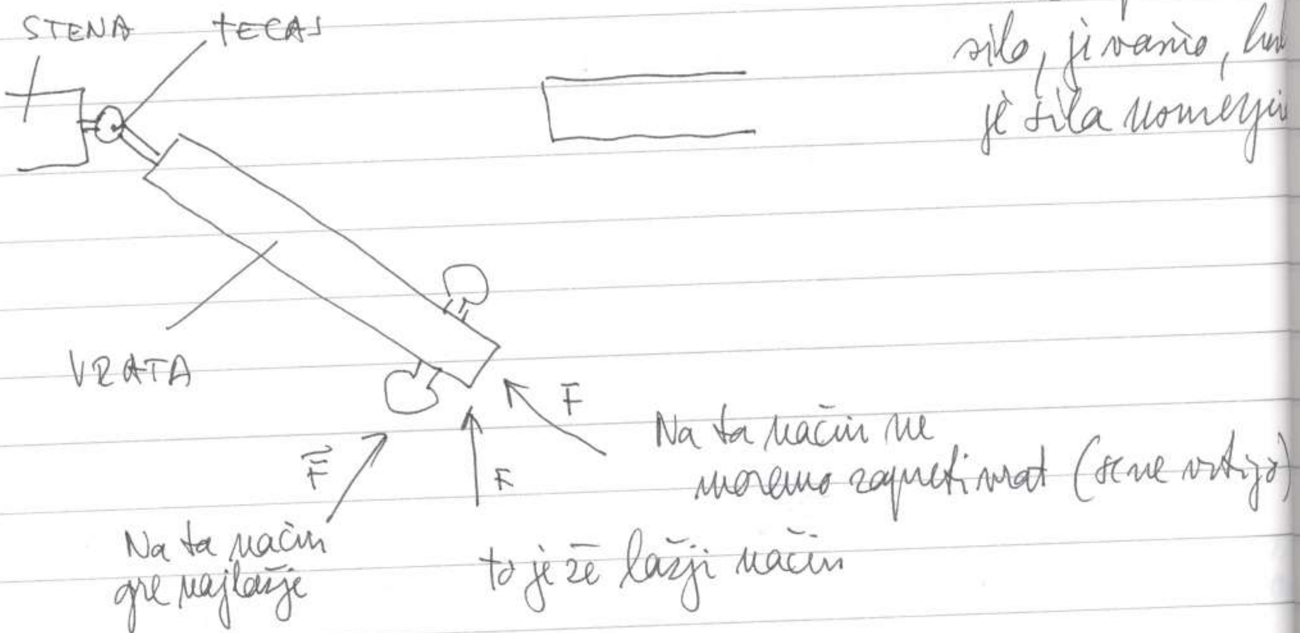
$M_a, M_b = ?$

a) $M = r_\perp \cdot F = 700N \cdot 0{,}05m = 35\,N \cdot m$

b) $M = r_\perp \cdot F = r \cdot F \cdot \cos 45° =$
$= 35\,Nm \cdot \cos 45° = 24{,}7\,Nm$

V primeru (b) je torej navor manjši!

Pojem navora lahko enostavno ridmio na vratih: če poskušamo vrata zapreti s silo, ji vamo, kot je sila usmerjena



Primer 2: Dva tanka valja sta med seboj pritrjena tako, da njuni geometrijski osi sovpadata. Premer prvega valja je 60 cm premer drugega valja pa 100 cm. Na obodu večjega valja prijemlje sila $F_1 = 50N$ pod kotom 30° glede na tangento. Na obod manjšega valja prijemlje sila $F_2 = 50N$ ~~glede~~ v smeri tangente in sicer tako, da poskuša vrteti valja v obratni smeri kot sila F_1. Kolikšen je skupni navor obeh sil in v katero smer se valja vrtita?

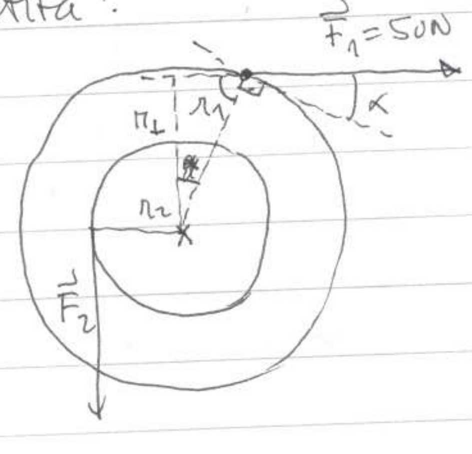
$2r_1 = 100 cm$

$2r_2 = 60 cm$

$F_1 = F_2 = 50N$

$\underline{\alpha = 30°}$

$M = ?$



Navor sile F_1 : $M_1 = F_1 \cdot r_{1\perp} = F_1 \cdot r_1 \cdot \sin \cancel{\alpha}\, 60°$

$M_2 = -F_2 \cdot r_2$

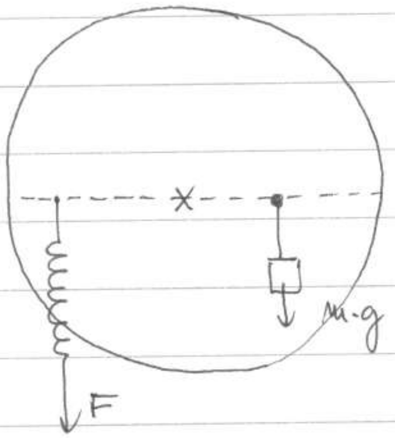
$M = M_1 + M_2 = F_1 r_1 \sin\alpha - F_2 r_2 = 50\,N \cdot 0{,}5\,m \cdot \sin 60° - 50\,N \cdot 0{,}3\,m$

$= 21{,}6\,Nm - 15\,Nm = +6{,}6\,Nm$

Skupen navor je pozitiven, valja se ~~kača~~ vrtita v smeri urinega kazalca.

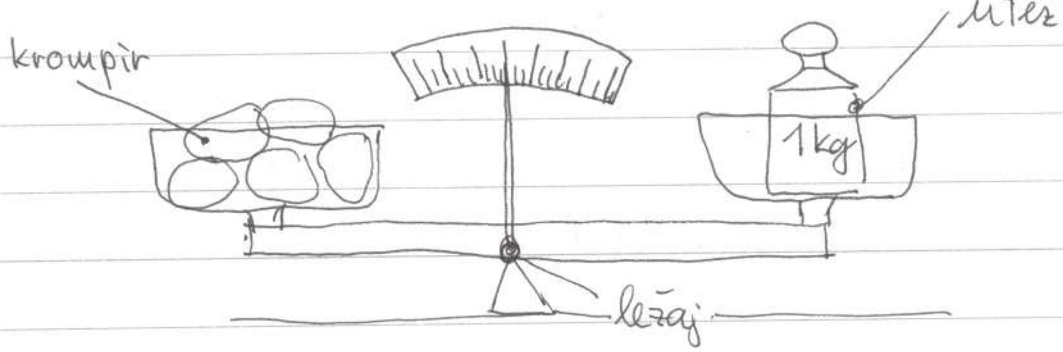
Kako merimo navore?

(a)

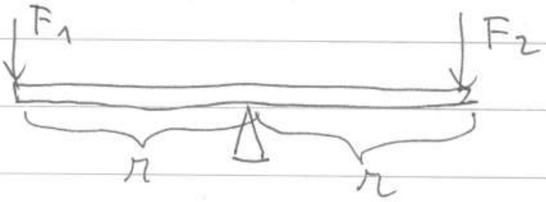


Imamo ravnovesje navorov: navor mase uravnovesimo z vzmetno tehtnico, ki prijemlje v znani razdalji

(b) Navadna tehtnica



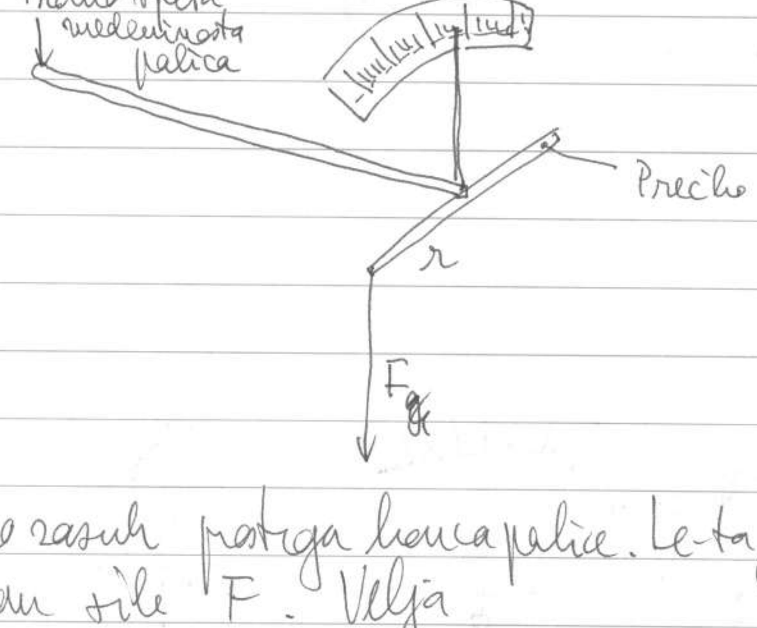
Tukaj uravnovesimo dva navora zunanjih sil: sila teže uteži in sila teže neznane mase



Skupni navor $-F_1 \cdot r_1 + F_2 r = 0 \quad r(F_2 - F_1) = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

Tehtnica je uravnovešena, ko sta oba navora po velikosti enaka, po predznaku pa različna.

(c) torzijska tehtnica : zvijamo nitko ali pa kovinski drog



Merimo zasuk prostega konca palice. Le-ta je sorazmeren z navorom sile F. Velja

$$M = D \cdot \varphi$$

φ .... kot zasuka tehtnice

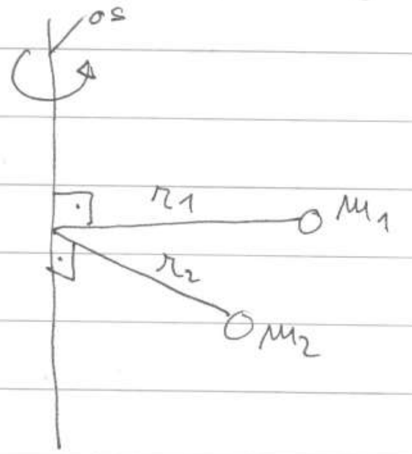
D ..... torzijski koeficient žice ali palice

Poglejmo si sedaj, kako izračunamo vztrajnostne momente togih teles:

Pomembno: vztrajnostni moment togega telesa vedno navajamo (izračunamo) za določeno os. Če se os spremeni, se tem ustrezno spremeni vztrajnostni moment telesa.

Vztrajnostni moment togega telesa izračunamo tako, da telo razdelimo na zelo drobne delce, ki jih lahko imamo za točkasto telo, potem pa seštejemo vztrajnostne momente vseh delčkov. To si bomo ogledali na primeru.

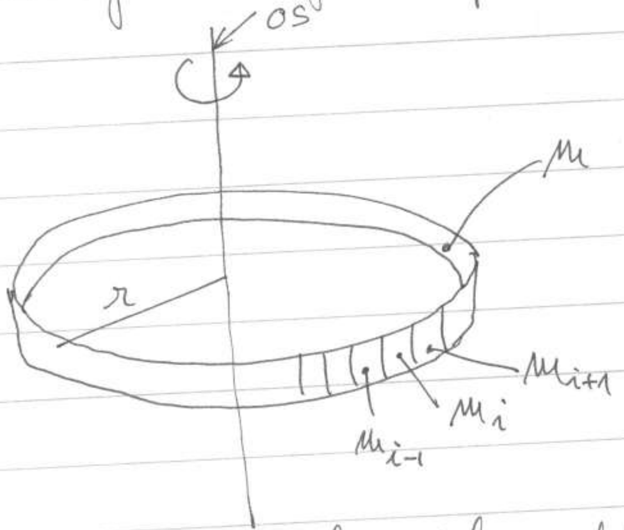
Primer 1: vztrajnostni moment dveh točkastih teles z masama m_1 in m_2 v razdaljah od osi r_1 in r_2



$$J = J_1 + J_2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Pazi: vztrajnostni moment je tem večji, čim večja je razdalja mase od osi

Primer 2: Izračunaj vztrajnostni moment zelo tankega obroča z maso m in polmerom r glede na geometrijsko os obroča!



Obroč razdelimo na zelo majhne dele z maso m_i. Oddaljenost od osi obroča je za vse te delce enaka r. Skupni vztrajnostni moment je torej:

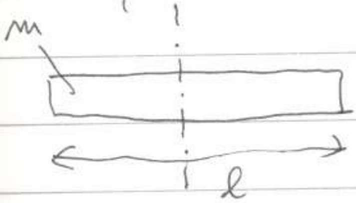
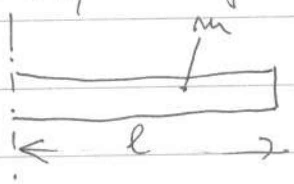
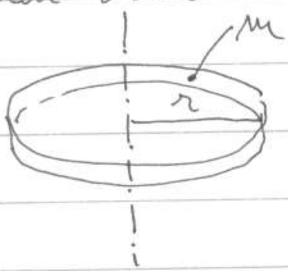
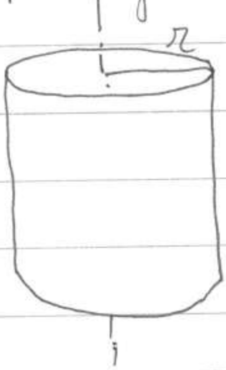
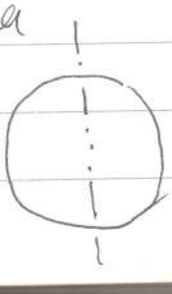
$$J = m_1 r^2 + m_2 r^2 + \dots + m_i r^2 + \dots + m_N r^2 =$$

$$= r^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_N) = r^2 \cdot m$$

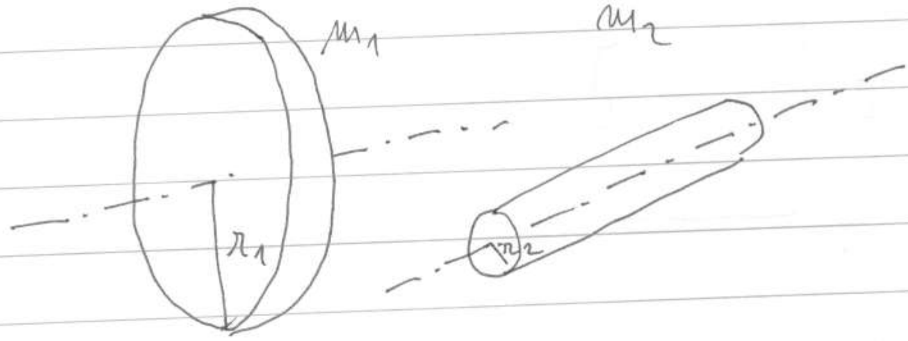
$$\boxed{J = m \cdot r^2}$$

To je vztrajnostni moment obroča z maso m in radijem r, glede na ~~os~~ geometrijsko os. Zanimivo, da je vztrajnostni moment enak vztrajnostnem momentu točkastega telesa!

Primeri vztrajnostnih momentov različnih geom. teles

Telo	J
Palica, os v središču 	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
Palica, os v krajišču 	$J = \frac{1}{3} m l^2$
Tanek obroč 	$J = m \cdot r^2$
Valj, homogen 	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
Krogla 	$J = \frac{2}{5} m r^2$

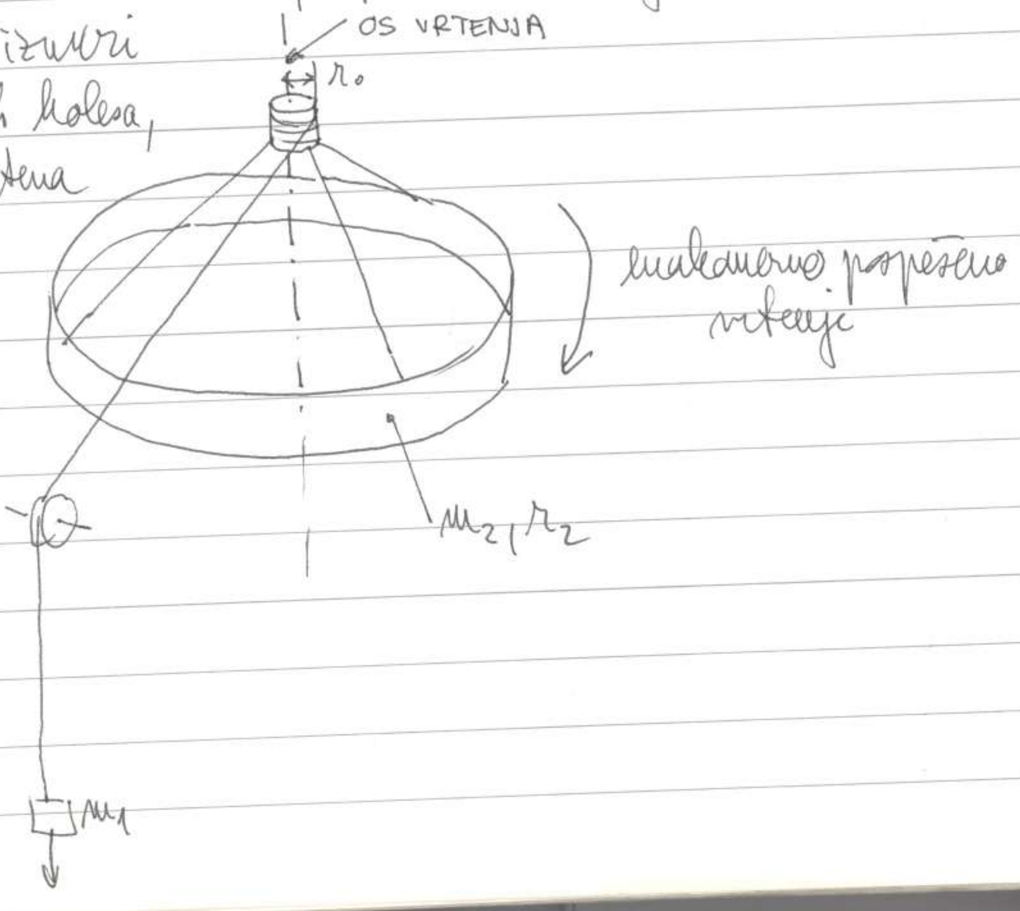
Pomembno je tole: če vzamemo dva valja, ki sta enako težka, pa različnih premerov, potem ima večji valj večji vztrajnostni moment kot pa manjši



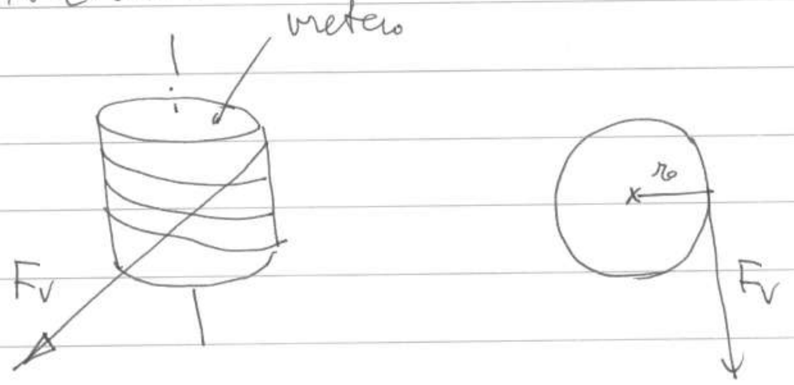
Kljub temu da je $m_1 = m_2$, je $J_1 > J_2$. Zato, ker je pri večjem valju masa razporejena na večjih razdaljah od osi, kot pri manjšem valju! To je pomembno

<u>Primer 3</u>: Enakomerno pospešeno vrtenje kolesa

Izračunaj ali izmeri kotni pospešek kolesa, ki je preko vretena in škripca povezano z utežjo.



Preko vrvice deluje sila teže mase m_1. Ta sila vrvice povzroči navor na vreteno.



$$M_V = F_V \cdot r_0$$

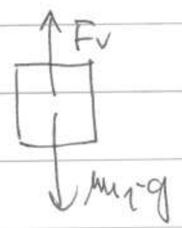
To je navor sile vrvice

Preko tega navora na vreteno se začne enakomerno pospešeno vrteti celoten velik obroč. Poglejmo ali lahko izračunamo kotni pospešek?

Pogledam gibanje posameznih delov tega sistema

a) masa uteži m_1:

2. Newtonov zakon



$$m_1 \cdot g - F_V = m_1 \cdot a$$

$$\hookrightarrow F_V = m_1 (g - a)$$

b) Na kolo deluje preko vretena navor $M = F_V \cdot r_0$. Ta navor povzroči enakomerno pospešeno vrtenje kolesa

$$M = J \cdot \alpha$$

J ... vztrajnostni moment vrtečega kolesa

$$F_V \cdot r_0 = J \cdot \alpha$$

α ... kotni pospešek

Iz tega izračunam

$$F_v \cdot r_0 = m_1(g-a)r_0 = J \cdot \alpha$$

Velja še $a_T = \alpha \cdot r_0 = a$

$$m_1(g-a)r_0 = m_1 g r_0 - m_1 \cdot \alpha \cdot r_0^2 = J \cdot \alpha$$

$$m_1 \cdot g \cdot r_0 = J \cdot \alpha + m_1 r_0^2 \cdot \alpha = \alpha(J + m_1 r_0^2)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m_1 g \cdot r_0}{J + m_1 r_0^2}}$$

To izračunam $J = m \pi R^2$ in dobim $\alpha = \ldots$

Kako pa to izmerim? Spočetka kolo miruje, torej $\omega = 0$, nato pa začne ω naraščati s časom

$$\alpha = \frac{\omega}{t}$$

če merim t in ω ob tem času lahko izračunam hitri pospešek.

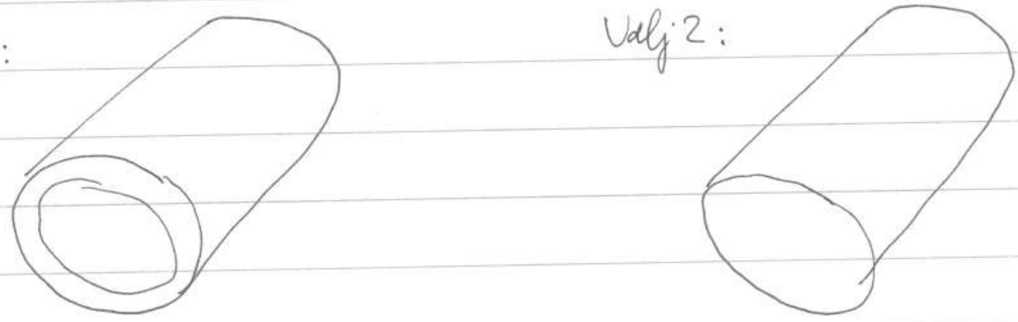
t merim takole: štopam, koliko časa uteč pospenuje kolo. To tem času ko hitrost kolesa konstantna, zato jo lahko izmerim posebej, tako da štopam čas za en ali več obhodov

$$\alpha = \frac{\omega}{t_0} \qquad t_0 \text{ dobočim}$$

$$\omega = \frac{2\pi \rightarrow \text{kot pri enem obhodu}}{t_1 \rightarrow \text{čas za 1 obhod}}$$

Primer 4: Dva enako težka valja z enakima premerama postavimo na enakih mestih na klanec. Eden od valjev je iz homogenega materiala, drugi pa je na sredini ~~[illegible]~~ votel. Valja opustimo. Kateri valj se bo gibal hitreje?

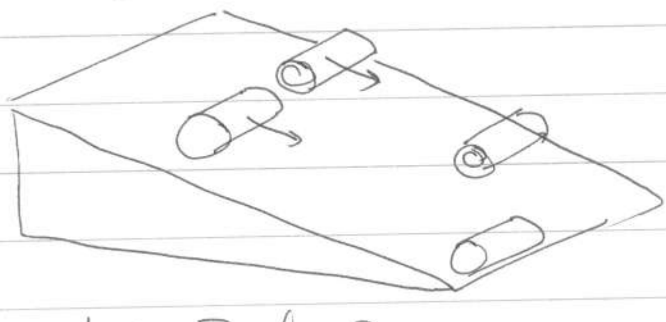
Valj 1: Valj 2:



votel poln

Oba valja imata enaki masi (poln je iz plastelina, votli pa iz kovine).

~~Kak~~



Votli valj zaostaja. Zakaj?

Poglejmo za kotalno gibanje gre:

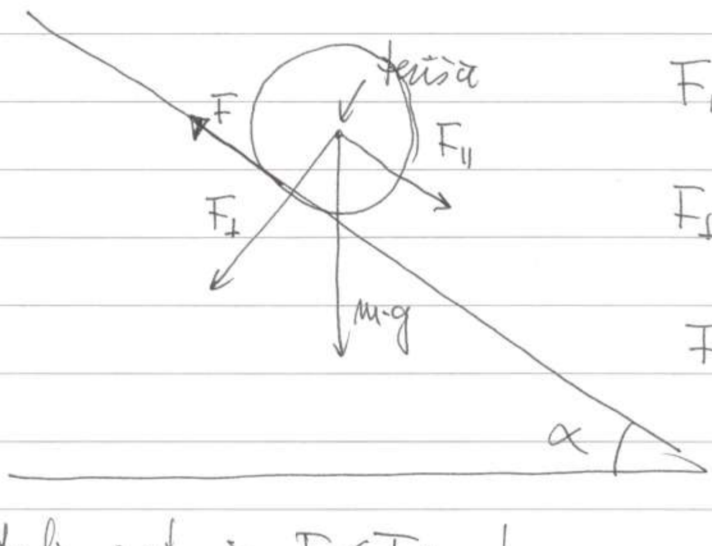
1. V obeh primerih je sila, ki gibanje vsiljuje enaka, to je vzporedna komponenta sile teže na klanec.
2. ~~Pa~~ Masi valjev sta enaki → torej bi moral biti pospešek težišča enak → to je res, če valja zdrsujeta, ne vrtita.
3. Kar je različno, sta vztrajnostna momenta: votli valj

ima praktično vso maso zbrano na plašču, zato ima več
večji vztrajnostni moment od polnega valja z enako maso in
radijem.

Gre za dvoje vrst gibanj:

- gibanje težišča
- vrtenje valja okoli težiščne osi

Poglejmo si sedaj obe vrsti gibanj posebej:



$F_{\parallel}$.... paralelna komp sile teže

$F_{\perp}$.... pravokotna komp teže

F.... sila, s katero podlaga vrt

Valj se kotali, zato je $F < F_{tr}$!

a) gibanje težišča valja: $F_{\parallel} - F = m \cdot a^*$ $\quad a^*$... pospešek težišča

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - F = m \cdot a^*$$

b) Vrtenje okoli težiščne osi:

α... kotni pospe

$$M = J\alpha$$
$$F \cdot r_0 = J\alpha$$

(c) Ker se valj kotali, velja $v^* = v_{obod} = r_0 \cdot \omega$

pospešek težišča $a^* = \frac{\Delta v^*}{\Delta t} = r_0 \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r_0 \cdot \alpha$

je kar enak tangentnemu pospešku!

Imam torej 3 enačbe:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot g \cdot \sin\alpha - F &= m \cdot a^* \\ F \cdot r_0 &= J \cdot \alpha \\ a^* &= r_0 \cdot \alpha \end{aligned}\right\}$$

Neznanke so F, α in a^*, torej tudi 3, zato je sistem enačb rešljiv. Kako pa izračunam a^*? Znebiti se moram F in α

$$F \cdot r_0 = J \cdot \frac{a^*}{r_0}$$, to vstavim v 1. enačbo

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - J \frac{a^*}{r_0^2} = m \cdot a^*$$

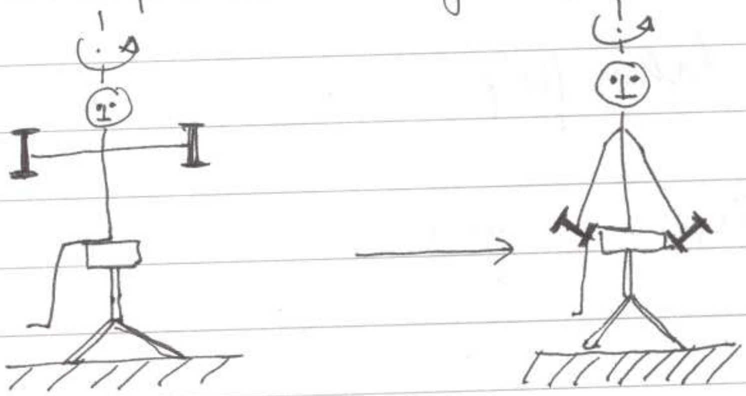
$$m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a^* + \frac{J}{r_0^2} a^* = a^* \left(m + \frac{J}{r_0^2}\right)$$

$$\boxed{a^* = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{m + \frac{J}{r_0^2}}}$$

Sedaj pa poglejmo razliko med obema valjema. Masi in polmera sta enaka, pač pa je J votlega valja večji. Ker je to v imenovalcu, bo zato pospešek težišča votlega valja manjši. Zato gre tudi počasneje po strmini.

2.3. Izrek o vrtilni količini

Poglejmo si poskus na vrtljivem stolu



mož s stolom se vrti s kotno hitrostjo ω_1

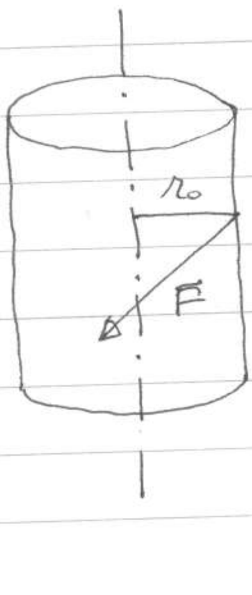
ω_1

mož se začne hitreje vrteti

ω_2

Ugotovimo $\omega_2 > \omega_1$. Vprašamo se zakaj je tako, ali da pojav lahko na kakšen način razložimo?

Poglejmo si vrtenje togega telesa, npr. vrtenje valja okoli njegove geometrijske osi, ki je nepremična. Imejmo še znani navor M sile F:



Navor sile je

$$M = F \cdot r_0$$

Velja: $$M = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad / \cdot \Delta t$$

$$M \cdot \Delta t = J \cdot \Delta \omega = J(\omega - \omega')$$

ω ... končna kotna hitrost

ω' ... začetna kotna hitrost

$M \cdot \Delta t$ ... sunek navora zunanjih sil

Definiram vrtilno količino togega telesa, ki se vrti okoli nepremične osi:

$$\boxed{\Gamma = J \cdot \omega}$$

Tako da sunek sile lahko zapišem kot:

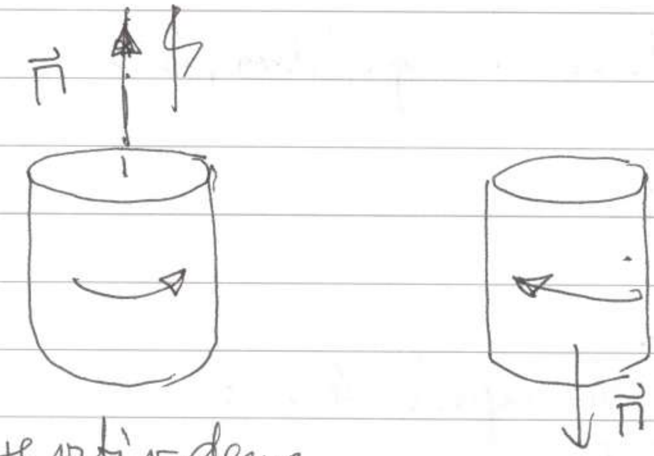
$$\boxed{M \cdot \Delta t = \Gamma - \Gamma'}$$

To enačbo imenujemo izrek o ohranitvi vrtilne količine, ki pravi: sunek zunanjih navorov glede na nepremično os je enak spremembi komponente vrtilne količine v smeri nepremične osi

Vrtilna količina ima vektorski značaj, saj se telo lahko vrti v levo ali v desno smer. Vrtilna količina $\Gamma = J \cdot \omega$ je torej lahko pozitivna ali pa negativna (ker ω lahko kaže v levo ali desno ma)

Kako si predstavljamo smer vrtilne količine? Za to uporabimo določeno pravilo, ki ga najlažje spoznamo na primeru valja, ki se vrti okoli težiščne osi:

To je pravilo desne roke



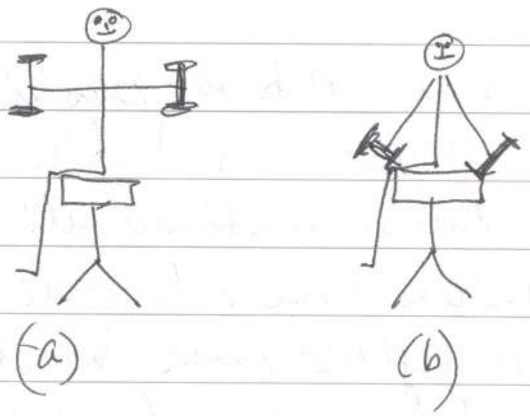
valj se vrti v desno

Valj se vrti v levo

Če se smer vrtenja obrne, se spremeni smer vrtilne količine

Ali je mogoče s tem zakonom pojasniti spremembo kotne hitrosti?

Primer 1:



Mož sedi na vrtljivem stolu in drži v rokah enaki uteži. Celotni vztrajnostni moment stola, moža in uteži v odročenju je 10 kg m², v priročenju pa 2,5 kg m². Na začetku ima mož roki v odročenju in se zavrti vsako sekundo enkrat. Kolikokrat na sekundo se zavrti v priročenju?

$J_1 = 10\ kg\,m^2$ $\quad t_1 = 1\,s$

$J_2 = 2{,}5\ kg\,m^2$ $\quad t_2 = ?$

$$M \cdot \Delta t = \Gamma - \Gamma' = J_2 \cdot \omega_2 - J_1 \omega_1 = 0$$

Ker ni zunanjih navorov, se komponenta vrtilne količine ohranja:

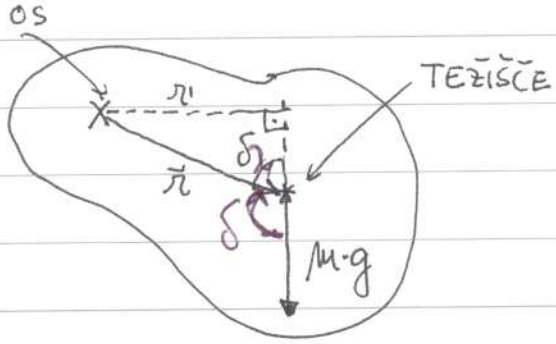
$$J_2 \cdot \omega_2 - J_1 \omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{J_1}{J_2} = \frac{2\pi}{t_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{t_2} = \frac{2\pi}{t_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} \Rightarrow \boxed{t_2 = t_1 \cdot \frac{J_2}{J_1}}$$

$$t_2 = 1s \cdot \frac{2{,}5\,kgm^2}{10\,kgm^2} = 0{,}25\,s$$ Vsako sekundo se zavrti 4x

2.3.1 Navor sile teže, statika togega telesa

Poglejmo si navor sile teže: pokazali smo da sila teže prijemlje v težišču telesa. Poglejmo si, kako je z navorom sile teže, če se telo lahko vrti okoli osi:

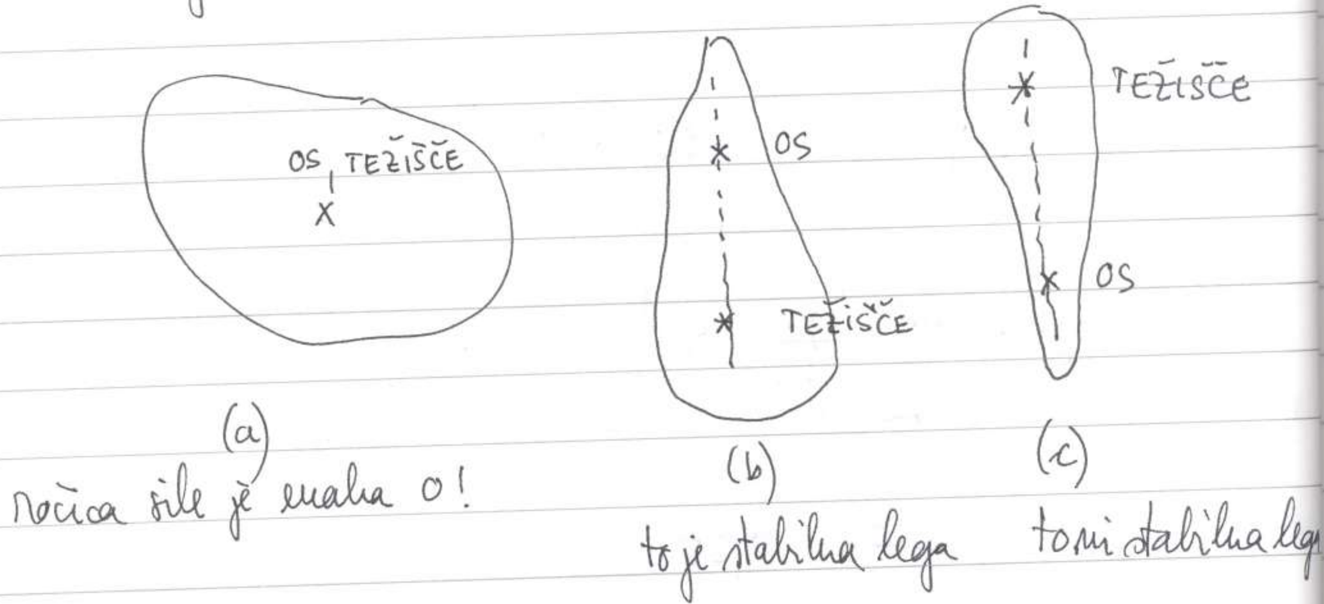


r' .... ročica sile

r ..... razdalja osi od težišča telesa

Navor sile teže je: $\boxed{M_g = m \cdot g \cdot r' = m \cdot g \cdot r \cdot \sin \delta}$

Kdaj je ta navor enak nič? Dve možnosti sta
- os vrtenja je postavljena v težišče
- os vrtenja leži na navpični premici skozi težišče



Na ta način lahko določimo lego težišča → telo obesimo in povlečemo navpičnico skozi os. To naredimo za več različnih osi in iz presečišča premic določimo lego težišča.

Statika togega telesa:

Ugotovili smo, da težišče togega telesa miruje ali se giblje premo enakomerno, če je vsota vseh sil na to telo enaka nič. Vendar nismo povedali še ničesar o vrtenju telesa. Zato dodajmo:

Telo miruje ali se giblje premo enakomerno ali se enakomerno vrti, če je vsota vseh zunanjih sil enaka nič in če je vsota vseh zunanjih navorov enaka nič.

Ravnovesje: $\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{a}^* = 0$ $\quad \vec{a}^*$ .... pospešek težišča

(vsota vseh sil)

$\sum_i M_i = 0 \Rightarrow \alpha^* = 0$ $\quad \alpha^*$ .... kotni pospešek glede na os skozi težišče.

Primer 1: Homogena deska dolžine 4m in mase 20kg je podprta na 1/3 svoje dolžine, tako, da se lahko prosto vrti okoli podporne točke. Na kateri strani in v kolikšni razdalji od osi mora stati otrok z maso 25kg, da deska miruje v vodoravnem položaju? S kolikšno silo pritiska deska na podporno točko?

$m_1 = 20\,kg$

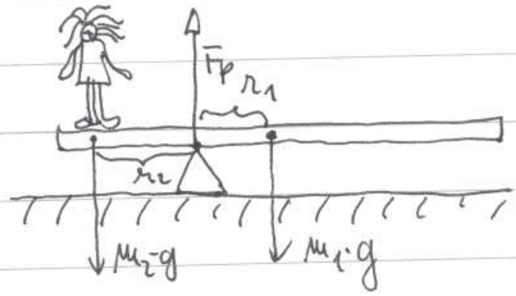
$l = 4\,m$

$l_1 = 1/3\, l$

$m_2 = 25\,kg$

$r_2 = ?$

$F = ?$



$$r_1 = \frac{l}{2} - l_1 = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{3-2}{6} l = \frac{l}{6}$$

Pogoj za ravnovesje: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ in $\sum_i M_i = 0$

Koliko sil deluje na desko? Sile teže deske, sila podlage in sila teže otroka.

(a) Ravnovesje sil: $-m_2 \cdot g - m_1 \cdot g + F_p = 0$

$$\boxed{F_p = (m_1 + m_2) g}$$

$$F_p = 45\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 = \underline{441\,N}$$

(b) Kako je z navori? Navor sile podlage je enak nič, ker je ročica te sile enaka nič. Ostaneta še navora sile teže deske in sile teže otroka

$$m_1 \cdot g \cdot r_1 - m_2 \cdot g \cdot r_2 = 0$$

$$r_2 = r_1 \frac{m_1}{m_2} = \frac{l}{6} \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

$$r_2 = \frac{4m}{6} \cdot \frac{20}{25} = \underline{0{,}53\,m}$$

Pogoj za ravnovesji: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ in $\sum_i M_i = 0$

Koliko sil deluje na desko? Sile teže deske, sila podlage in sila teže otroka.

(a) Ravnovesje sil: $-m_2 \cdot g - m_1 \cdot g + F_p = 0$

$$\boxed{F_p = (m_1 + m_2) g}$$

$$F_p = 45\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 = \underline{\underline{441\,N}}$$

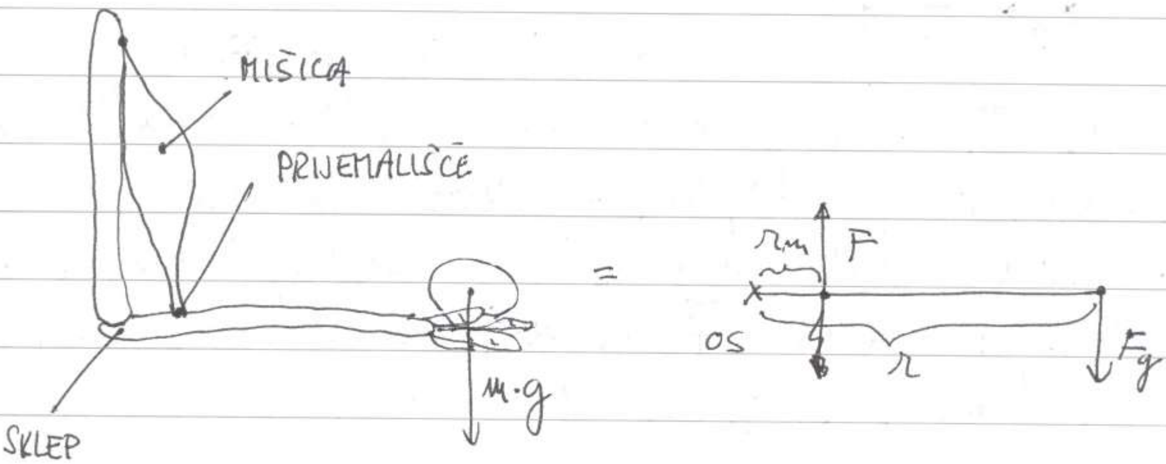
(b) Kako je z navori? Navor sile podlage je enak nič, ker je ročica te sile enaka nič. Ostaneta še navora sile teže deske in sile teže otroka

$$m_1 \cdot g \cdot r_1 - m_2 \cdot g \cdot r_2 = 0$$

$$r_2 = r_1 \frac{m_1}{m_2} = \frac{l}{6} \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

$$r_2 = \frac{4\,m}{6} \cdot \frac{20}{25} = \underline{\underline{0{,}53\,m}}$$

Primer 2: Izračunaj s kolikšno silo mora delovati mišica na roki, če drži v roki 5 kg utež, kot kaže slika. Razdalja med komolcem in utežjo je 40 cm, prijemališče mišice pa je 5 cm od komolčnega sklepa.



Navora morata biti enaka $F_g \cdot r - F \cdot r_m = 0$

$$\boxed{F = F_g \cdot \frac{r}{r_m}}$$

$$F = 5\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot \frac{40\,cm}{5\,cm} = \underline{\underline{392\,N}}$$

Primer 3: Lestev dolžine 5 m in maso 20 kg je prislonjena ob navpično steno, tako da sega do višine 4 m. Izračunaj velikosti sil v obeh dotikališčih lestve, pri čemer upoštevaj, da na navpični steni ni trenja, na vodoravni pa je.

$l = 5\,m$

$m = 20\,kg$

$d = 4\,m$

$F_1, F_2 = ?$

$F_3 = ?$

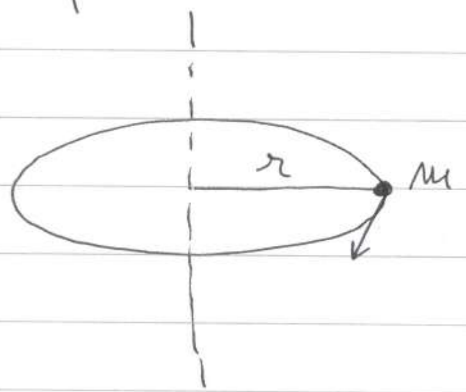
2.4. Kinetična energija togega telesa

Poljubno gibanje togega telesa lahko sestavimo iz gibanja težišča in vrtenja togega telesa okoli osi skozi težišče.

$$\boxed{\text{gibanje togega telesa} = \underset{\text{(točke)}}{\text{gibanje težišča}} + \underset{\text{okoli težišča}}{\text{vrtenje telesa}}}$$

Kinetična energija togega telesa je zaradi tega enaka vsoti kinetične energije zaradi gibanja težišča in rotacijske kinetične energije.

Rotacijska kinetična energija:



masa m (točka) kroži v razdalji r s kotno hitrostjo ω

W_k zaradi kroženja:

$$W_k = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} \overset{=J}{m \cdot r^2} \omega^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$$\boxed{W_k = W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

To velja splošno, ne samo za točkasta telesa!

Kinetična energija togega telesa je potem:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2}$$

v^*.... hitrost gibanja težišča

ω.... kotna hitrost vrtenja telesa okoli težiščne os

Zapišimo sedaj energijski zakon za togo telo:
Delo zunanjih sil razen sile teže je enako vsoti spremembe kinetične energije zaradi gibanja težišča, spremembe potencialne in rotacijske energije.

Primer 1: Bakreno kroglo s polmerom 5cm zasučemo tako, da se kotali po ravni podlagi s hitrostjo 1m/s. Kolikšna je kinetična energija krogle? Gostota bakra je $8{,}9 \cdot 10^3 kg/m^3$

$r = 5cm$
$v^* = 1m/s$
$\rho = 8{,}9 \cdot 10^3 kg/m^3$
$W_k = ?$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2$$

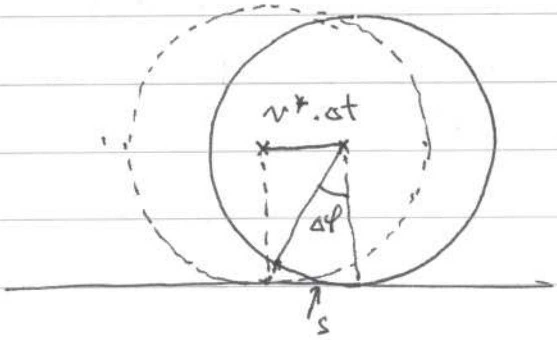
Ne poznamo m, J in ω

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8{,}9\, 10^3 kg/m^3 \cdot (0{,}05m)^3}{} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} 8{,}9 \cdot 10^3 kg/\cancel{m^3} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3 \cancel{m^3} = \frac{4\pi \cdot 8{,}9 \cdot 125}{3} \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} kg$$

$$= \underline{\underline{4{,}6 kg}}$$

Kako pa določim kotno hitrost pri kotaljenju?



Lok je enak dolžini premika težišča!

$$s = v^* \cdot \Delta t = r \cdot \Delta \varphi \Rightarrow \omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{v^*}{r}$$

$\boxed{\omega = \frac{v^*}{r}}$ To velja pri kotaljenju (ali $v^* = \omega \cdot r$ obodna hitrost!)

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overbrace{\left(\frac{\cancel{2}}{5} m \cdot \cancel{r^2}\right)}^{J} \cdot \frac{v^{*2}}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{5} m v^{*2} =$$

$$= \frac{5+2}{10} m v^{*2} = \frac{7}{10} m \cdot v^{*2}$$

$\boxed{W_k = \frac{7}{10} m \cdot v^{*2}}$ $W_k = \frac{7}{10} \cdot 4{,}6\,kg \cdot 1\,m^2/s^2 = \underline{\underline{3{,}2\,J}}$

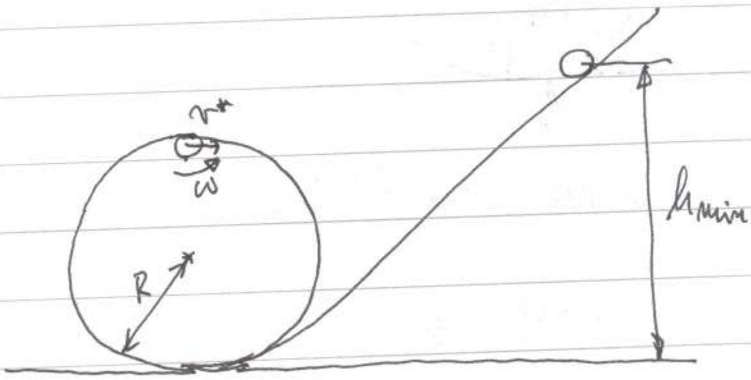
Primer 2: Kroglica z radijem 1 cm in maso 50 g se kotali po nagnjenem žlebu, katerega spodnji del je zavit v krog z radijem R = 20 cm. Izračunaj s katere najmanjše višine moramo spustiti kroglico, da se ves čas dotika žleba!

$r = 1cm$

$m = 50g$

$R = 20cm$

$h_{min} = ?$



Začetno stanje: $W_k' = 0$

$W_p' = m \cdot g\, h$

$W_{rot}' = 0$

Končno stanje: $W_k = \frac{1}{2} m v^{*2}$

$W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

$W_p = m \cdot g \cdot 2R$

$$A = 0 = \frac{1}{2} m v^{*2} - 0 + m \cdot g \cdot 2R - m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} J\omega^2 - 0 = 0$$

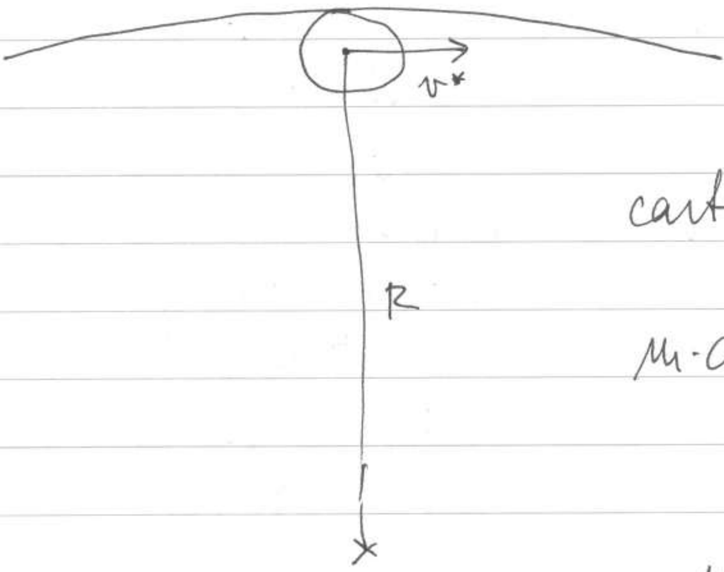
$$m \cdot g\, 2R - m \cdot g h + \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2 = 0$$

Velja: $J = \frac{2}{5} m r^2$, $v^* = \omega \cdot r$; to dvoje vstavim v zg. enačb

$$m \cdot g \cdot 2R - m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = 0$$

$$m \cdot g\, 2R - m g h + \frac{7}{10} m \cdot \omega^2 r^2 = 0$$

Tu nam sedaj manjka ω, kako ga dobiti? Poglejmo gibanje kroglice, ko je v zgornjem delu. Kroglica se mora tam še gibati, zato da centrifugalna sila kompenzira silo teže!



centrifugalna sila je

$$m\cdot a_c = m\cdot\frac{v^{*2}}{R} = m\cdot g$$

$$v^{*2} = R\cdot g$$

$$\omega^2 r^2 = R\cdot g$$

To vstavim v prejšnjo enačbo in dobim

$$\cancel{m\cdot g}\cdot 2R - \cancel{m\cdot g}\cdot h + \frac{7}{10}\cancel{m\cdot g}\cdot R = 0$$

$$\boxed{h = 2R + \frac{7}{10}R}$$