MEHANIKA(prvi del)

Kinematika

Obravnavamo gibanje točkastega telesa. Izberemo si pravokotni desni koordinatni sistem (sl. 1), to je takšen, katerega os z kaže v smeri pomika desnega svedra (ali vijaka), ki ga zavijamo tako, kot če bi hoteli zavrteti os x v smer osi y. Lego telesa predstavimo z radij - vektorjem $\mathbf{r}$, ki kaže iz izhodišča koordinatnega sistema do točke s koordinatami (x, y, z). Koordinate x,y,z merimo v metrih. Meter je deset milijonti del dolžine pariškega poldnevnika (od ekvatorja do severnega tečaja), ali bolj natančno: 1650763,73 valovnih dolžin oranžne svetlobe, ki jo oddaja atom kriptona z atomskim številom 86.

Če se telo giblje, definiramo še vektorja hitrosti $\mathbf{v}$ in pospeška $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \qquad (M1)$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \; . \qquad (M2)$$

Čas merimo v sekundah. Približna definicija sekunde izhaja iz delitve dneva na 24 ur in ure na 3600 sekund (1 dan=86400 sekund). Bolj natančno pa je skunda določena z definicijo, ki pravi, da je ena sekunda enaka času trajanja 9,192,631,770 nihajev valovanja, ki ga oddaja atom cezija 133 pri prehodu med dvema energijskima stanjema, ki nastaneta na račun hiperfine cepitve osnovnega energijskega stanja.

Če vemo, kako se pospešek $\mathbf{a}(t)$ spreminja s časom, lahko enačbi (1) in (2) integriramo in dobimo časovno odvisnost hitrosti in lege telesa:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int \mathbf{a}(t)dt \qquad (M3)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int \mathbf{v}(t)dt \; . \qquad (M4)$$

Enakomerno pospešeno premo gibanje

Če se telo giblje po premici, ki sovpada na primer z osjo x koordinatnega sistema, so povezave med količinami $x(t)$, $v_x(t)$ in $a_x(t)$ podane z enačbami (M3) in (M4). Komponente odmikov, hitrosti in pospeškov v smereh y in z postavimo enake nič. Telo, ki se nahaja v času $t = 0$ pri x_0, ima v tem trenutku hitrost v_{x0} in se giblje s pospeškom a, bo imelo po preteku časa t hitrost

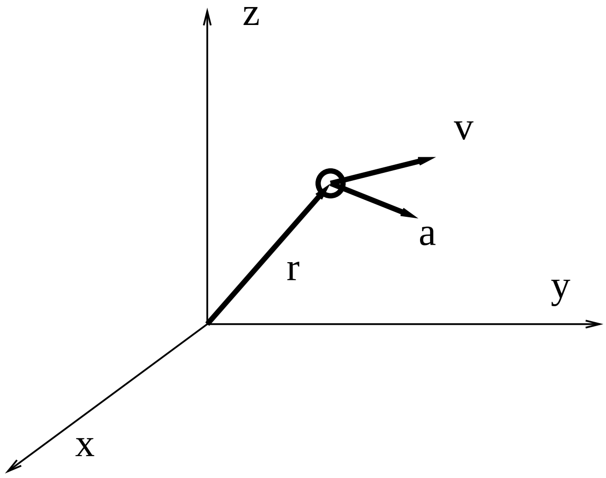
$$v_x(t) = v_{x0} + at \; ,$$

nahajalo pa se bo na mestu

$$x = x_0 + v_{x0}t + at^2/2 \; . \qquad (M5)$$

Krivo gibanje, poševni met

Poglejmo si še primer uporabe enačb (M1) in (M2) za bolj splošen primer. Telesa, ki so prepuščena sama sebi v zemeljskem težnostnem polju, se pospešujejo v smeri navpično navzdol s pospeškom $g = 9,82 m/s^2$, v vodoravni smeri deluje Coriolisov pospešek (glej



Slika 1: Lega, hitrost in pospešek točkastega telesa v desnem kartezičnem koordinatnem sistemu

enačbo (M31)), ki je majhen in ga bomo zanemarili. Torej ima vektor pospeška komponente

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g) ,$$

kar pomeni, da se komponenti hitrosti v vodoravni smeri ne spreminjata, v navpični smeri pa velja

$$v_z = v_{0z} - gt .$$

Za koordinate telesa bo torej veljalo

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

$$y(t) = y_0 + v_y t$$

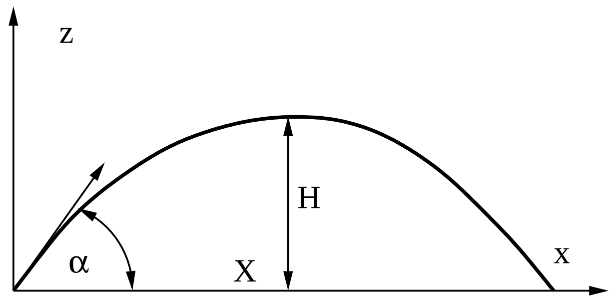
$$z(t) = z_0 + v_{0z} t - gt^2/2 . \qquad (M6)$$

Te enačbe lahko uporabimo za račun dometa pri poševnem metu (sl. 2). Če vržemo telo s hitrostjo v_0 pod kotom α glede na vodoravno smer tako, da so začetne komponente hitrosti $\mathbf{v}_0 = (v_0 cos\alpha, 0, v_0 sin\alpha)$, bo telo doseglo najvišjo točko v trenutku $t = T$, ko se navpična komponenta hitrosti izniči: $T = v_{0z}/g$. Po preteku nadaljnjega časa T bo telo padlo na tla, če so tla v isti višini, kot mesto, od koder smo telo vrgli. V času dvigovanja in padanja telesa $t = 2T$ bo telo v smeri x preletelo razdaljo $X = 2v_{0z}v_{0x}/g$. Če izrazimo domet z velikostjo začetne hitrosti in kotom α, dobimo izraz

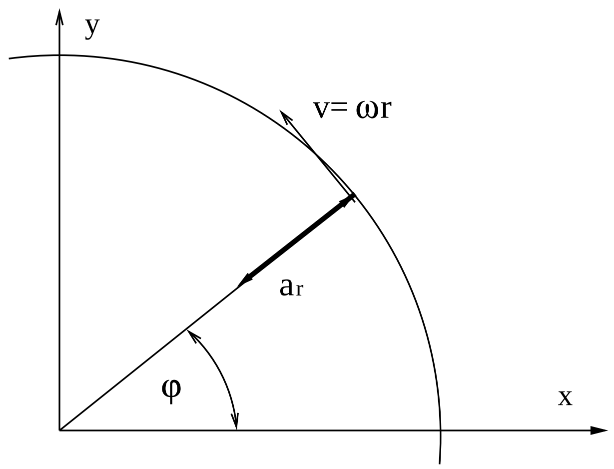
$$X = (v_0^2/g) sin(2\alpha) . \qquad (M7)$$

Največjo višino, ki jo doseže telo v času dviganja T - v naslednjem enako dolgem časovnem intervalu jo zopet izgubi - je enaka

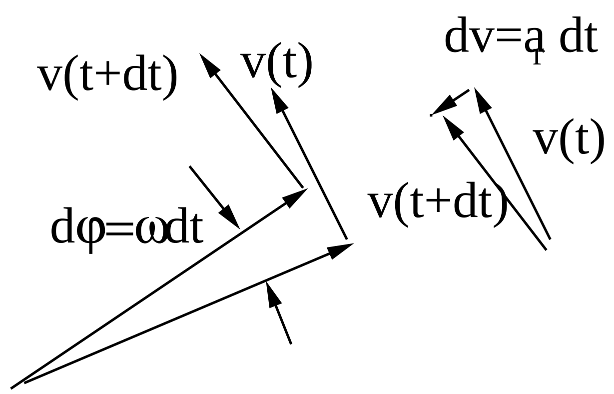
$$H = gT^2/2 = v_0^2 sin^2(\alpha)/2g . \qquad (M8)$$



Slika 2: Poševni met



Slika 3: Obodna hitrost in radialni pospešek pri kroženju



Slika 4: K izpejavi radialnega pospeška

Kroženje
Kroženje je gibanje telesa po krožnici, ki jo zapišemo v kartezičnih koordinatah v obliki

$$x^2 + y^2 = r^2 \ , \qquad (M9)$$

če je središče kroga v koordinatnem izhodišču. Gibanje je določeno, če povemo, kako se pri pogoju (M9) spreminjata $x(t)$ in $y(t)$. Zapis v polarnih koordinatah je enostavnejši, saj zapišemo le pogoj, da ima pri vseh vrednostih polarnega kota radij stalno vrednost, povedati pa moramo, kako se spreminja polarni kot v odvisnosti od časa. Parametrični zapis krožnice se glasi:

$$x = r \ \ cos\varphi \ ,$$

$$y = r \ \ sin\varphi \ .$$

Kroženje točkastega telesa je določeno, če povemo, kako se kot φ spreminja s časom. Pri enakomernem kroženju je zveza linearna:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \ . \qquad (M10)$$

S črko ω smo označili kotno hitrost, ki jo merimo v radianih v sekundi. Povezava med obodno hitrostjo in kotno hitrostjo (sl. 3) temelji na definiciji kota: $\varphi = l/r$. Dolžino loka smo označili z l, polmer kroga pa z r. En radian ($57^o 17' 45''$) je enak kotu v krožnem izseku, pri katerem je dolžina loka enaka polmeru kroga. Časovni odvod izraza $\varphi = l/r$ nas pripelje do zveze med kotno in obodno hitrostjo pri kroženju: $\omega = v/r$. Obhodni čas dobimo z deljenjem obsega kroga z obodno hitrostjo, ali kot kvocient polnega kota s kotno hitrostjo:
$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega$.
Obratna vrednost obhodnega časa je frekvenca kroženja $\nu = 1/T$. O enakomerno pospešenem kroženju govorimo, kadar se kotna hitrost enakomerno veča s časom:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \ . \qquad (M11)$$

V tem primeru velja za φ zveza

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2 \ . \qquad (M12)$$

Poleg kotnega pospeška je pri kroženju prisoten tudi linearni pospešek, ki ga lahko razstavimo na dve komponenti - radialno in tangencialno. Slednja kaže v smeri tangente na krog in njeno velikost dobimo, če pot vzdolž krožnice, ki se izraža kot $r\varphi(t)$, dvakrat odvajamo počasu in dobimo

$$a_t = r\alpha \ . \qquad (M13)$$

Pri enakomernem kroženju tangencialnega pospeška ni, smer hitrosti pa se kljub temu ves čas spreminja, saj njen vektor enakomerno kroži in se v času dt spremeni hitrost za $v\omega dt$. Sprememba hitrosti kaže proti središču kroga - torej v nasprotni smeri kot radij vektor (sl. 4). Če to spremembo delimo z dt, dobimo izraz za radialni pospešek

$$a_r = v\omega = v^2/r = \omega^2 r \ . \qquad (M14)$$

Izraz za radialni pospešek velja tudi za pospešeno kroženje. Za obodno, oziroma za kotno hitrost moramo postaviti trenutno hitrost. Pri enakomernem kroženju se spreminja le smer radialnega pospeška, pri pospešenem kroženju - četudi je kroženje enakomerno pospešeno - pa se spreminja tudi velikost radialnega pospeška.

Nihanje

Točkasto telo ali geometrijska točka sinusno niha, kadar se koordinata x telesa ali točke takole spreminja s časom:

$$x(t) = x_0 sin(\omega t + \delta)\ . \qquad (M15)$$

V tem zapisu predstavlja x_o amplitudo nihanja - to je največji odmik od mirovne lege, ω je krožna frekvenca nihanja, δ pa je nek poljubni fazni kot. Krožne frekvence ne smemo zamenjevati za kotno hitrost pri kroženju, čeprav ima iste enote in enako odvisnost od nihajnega časa T in nihajne frekvence ν, kot je odvisnost kotne hitrosti od obhodnega časa in frekvence kroženja. Velja namreč

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T\ . \qquad (M16)$$

Hitrost gibanja nihajoče točke dobimo z odvajanjem odmika po času:

$$v(t) = \omega x_0 cos(\omega t + \delta)\ . \qquad (M17)$$

Vidimo, da je hitrost za četrt nihaja fazno premaknjena glede na odmik nihala, toliko kot sta med sabo premaknjeni funkciji sinus in kosinus (sl. 5). Največja vrednost (amplituda) hitrosti je ωx_0. Pospešek je časovni odvod hitrosti

$$a(t) = -\omega^2 x_0 sin(\omega t + \delta)\ . \qquad (M18a)$$

Bodimo pozorni na dejstvo, da se v izrazu za pospešek pojavlja izraz za odmik in se izraz (M18a) poenostavi v

$$a(t) = -\omega^2 x\ . \qquad (M18b)$$

Ta zveza je zelo uporabna pri določanju nihajnega časa različnih nihal.

Dinamika točkastega telesa

Sile, Newtonovi zakoni

Sile so fizikalne količine, ki povzročajo pospeševanje in deformacijo teles. Sile so vektorske količine in jih lahko seštevamo in odštevamo. Merimo jih v *newton-ih* (N). Če poznamo komponente dveh sil, ki jih želimo sešteti, seštejemo komponente in dobimo komponente rezultante:

$$F_{rx} = F_{1x} + F_{2x}\ . \qquad (M19)$$

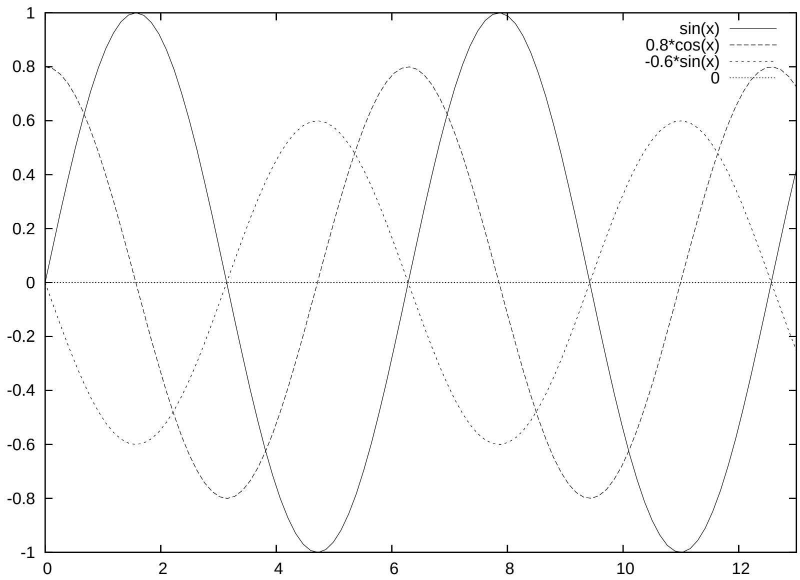
Če pa poznamo velikosti dveh sil in kot, ki ga oklepata, uporabimo za določitev velikosti rezultante kosinusov izrek (sl. 6)

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 cos\alpha\ . \qquad (M20)$$

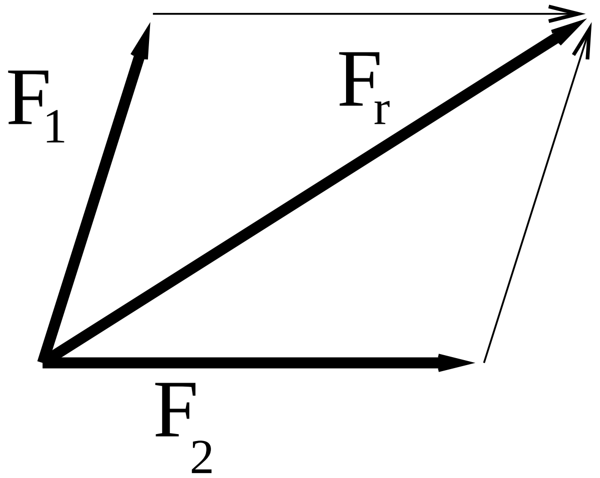
Pripravam, ki merijo sile, pravimo dinamometri. Najpreprostejša oblika dinamometra je vijačna vzmet (sl. 7), katere raztezek je sorazmeren sili, s katero raztezamo vzmet. Meritev temelji na enačbi

$$F = -kx\ . \qquad (M21)$$

S črko k smo označili konstanto vzmeti, ki jo najprej določimo z umeritvijo s pomočjo znane sile. Znak minus pa pišemo zato, ker kažeta raztezek vzmeti in sila v nasprotnih



Slika 5: Časovne odvisnosti odmika, hitrosti in pospeška pri sinusnem nihanju

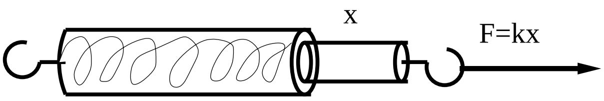


Slika 6: Paralelogram sil

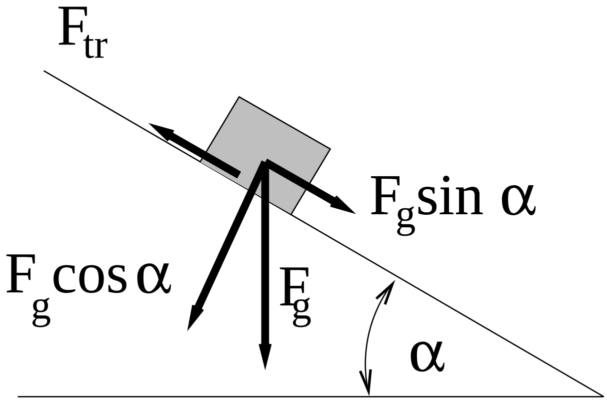
smereh.
Sila je lahko porazdeljena po prostornini ali po površini. Primer sile, ki je razporejena po prostornini, je sila teže. Za površinsko porazdeljeno silo uporabljamo besedi *tlak* in *pritisk*. Tlak merimo v *pascalih* ($Pa = N/m^2$). Večja enota za tlak je $bar = 100kPa$.

Telo na klancu, sila trenja
Če se na klancu s strmino α (to naj bo kot glede na vodoravnico) nahaja telo, je smiselno razstaviti njegovo silo teže (F_g) na dinamično komponento vzdolž strmine ($F_g sin\alpha$) in statično komponento, ki deluje pravokotno na podlago ($F_g cos\alpha$) (sl. 8). Če površina klanca ni idealno gladka, se pojavi še sila trenja, ki deluje v smeri navzgor po klancu. Če telo miruje, imenujemo to silo silo lepenja. Sila trenja

$$F_t = k_t F_p \qquad (M22)$$



Slika 7: Merjenje sile



Slika 8: Telo na klancu

je enaka produktu sile, ki deluje pravokotno na podlago in koeficienta trenja k_t. V primeru, ko je telo na klancu prepuščeno samo sebi in drsi po klancu z enakomerno hitrostjo, sta dinamična komponenta sile teže in sila trenja nasprotno enaki in se uničita:

$$F_g sin\alpha - k_t F_g cos\alpha = 0 \ .$$

Vidimo, da v tem primeru lahko določimo koeficient trenja, ki je enak

$$k_t = tg\alpha \ . \qquad (M23)$$

Če telo, ki je prepuščeno samemu sebi na klancu miruje, pomeni, da sila lepenja uravnoveša dinamično komponento sile teže. Z merjenjem največje strmine, pri kateri telo še miruje, določimo koeficient lepenja: $k_l = tg\alpha_{max}$. Če dinamična komponenta presega silo trenja, se telo giblje po klancu navzdol pospešeno.

Newtonovi zakoni

Newtonovi zakoni podajajo vzročno zvezo med silo, ki deluje na telo in med pospeškom telesa. Drugi Newtonov zakon pravi, da je zveza med silo in pospeškom linearna:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \ . \qquad (M24)$$

Sorazmernostni koeficient je masa telesa, ki se meri v kilogramih. Masa enega kilograma je približno enaka masi enega litra čiste vode pri 4^0C in pri atmosferskem tlaku. Količini *masa na enoto prostornine* pravimo gostota snovi in jo označimo s črko ρ. Na enačbi (M24) temelji tudi enota za silo (N), ki je tista sila, ki pospešuje maso 1 kg s pospeškom $1m/s^2$. Prvi Newtonov zakon trdi, da vsako telo miruje ali vztraja v enakomernem gibanju, če nanj ne deluje nobena sila. Tretji Newtonov zakon pa trdi, da sta sili, s katerima delujeta dve telesi drugo na drugo, nasprotno enaki.

Izrek o gibanju težišča

Vzemimo nabor več točkastih teles in zapišimo Newtonov zakon

$$\mathbf{F_i} = m_i \mathbf{a_i} \qquad (M25)$$

za vsako od njih. Sile $\mathbf{F_i}$ lahko razdelimo na zunanje in notranje. Slednje so posledica medsebojnega delovanja teles iz ravnokar omenjenega nabora. Ko seštejemo enačbe (M25) za vsa telesa, se na račun tretjega Newtonovega zakona vsi prispevki notranjih sil med sabo uničijo in dobimo

$$\mathbf{F_R} = \sum m_i \mathbf{a_i} \ , \qquad (M26)$$

kjer je $\mathbf{F_R}$ vsota zunanjih sil. Desno stran enačbe delimo in množimo z vsoto mas vseh teles ($M = \sum m_i$) in enačbo lahko zapišemo v obliki

$$\mathbf{F_R} = M\mathbf{a}^* \ , \qquad (M27)$$

kjer je $\mathbf{a}^*$ pospešek težišča

$$\mathbf{r}^* = \sum m_i \mathbf{r_i}/M \ .$$

Enačba (M27) predstavlja zapis izreka o gibanju težišča. Z integriranjem te enačbe po času dobimo hitrost težišča kot funkcijo časa, naslednja integracija pa nam da časovno odvisnost lege težišča. Izrek o gibanju težišča velja seveda tudi v primeru, ko so telesa, o katerih smo govorili, med sabo togo povezana. V tem primeru govorimo o sistemu togo povezanih točkastih teles, ali o enem samem togem telesu. Standardno togo telo ima maso enakomerno porazdeljeno po vsej svoji prostornini, tako da ima dobro definirano gostoto $\rho = dm/dV$, ali $\rho = m/V$, kjer je m masa, V pa volumen togega telesa. Sile, ki delujejo na togo telo, imajo prijemelišča v posameznih točkah v notranjosti ali na površini telesa, lahko pa so ploskovno porazdeljene po površini (govorimo o tlaku, ki deluje na površino), lahko pa so sile porazdeljene po prostornini, kot je na primer sila teže

$$d\mathbf{F}/dV = \rho \mathbf{g} \qquad (M28)$$

.

Gravitacijski zakon

Dve telesi, ki se privlačita, na primer jabolko na drevesu in zemeljska obla, delujeta drugo na drugo z nasprotno enakima silama. Vprašamo se lahko, s kakšno silo mora pecelj zadrževati jabolko, da ne odpade. Do odgovora na to vprašanje pridemo lahko tudi tako, da izmerimo pospešek g prostega pada jabolka potem, ko se odtrga in pada v smeri proti središču Zemlje. V skladu z drugim Newtonovim zakonom je za pospeševanje odgovorna sila $F_g = mg$, ki jo imenujemo sila teže. Ker je sila teže, ali gravitacijska sila, sorazmerna masi jabolka, mora biti, če naj velja tretji Newtonov zakon, sorazmerna tudi masi Zemlje, torej je sorazmerna produktu obeh mas, ki se privlačita. Analize gibanj nebesnih teles in laboratorijske meritve pokažejo, da je gravitacijski privlak dveh teles obratno sorazmeren kvadratu njune razdalje:

$$F = \kappa m_1 m_2 / r_{12}^2 \ . \qquad (M29)$$

Vrednost gravitacijske konstante je $\kappa = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

Iz gravitacijskega zakona sledi odvisnost zemeljskega težnega pospeška od oddaljenosti od zemeljskega središča. Iz enačbe (M29) sledi, da pada privlačna sila med dvemi telesi s kvadratom razdalje. Torej pada tudi zemeljski pospešek prostega pada na enak način in lahko zapišemo

$$g(r) = g_0(R/r)^2 \ ,$$

kjer je R zemeljski polmer (6380 km), g_0 je težni pospešek na površini Zemlje (9.82m/s^2) in r razdalja od točke nad zemeljskim površjem do zemeljskega središča. Za umetne zemeljske satelite, ki krožijo okrog Zemlje po krožnih tirih, velja, da je radialni pospešek enak zemeljskemu težnemu pospešku:

$$mv^2/r = g_0(R/r)^2 \ .$$

Na osnovi te enačbe lahko izračunamo hitrost kroženja. Na nizkih višinah (nekaj sto kilometrov) je hitrost kroženja enaka 7.9 km/s, čemur pravijo prva kozmična hitrost. Druga kozmična hitrost je za faktor $\sqrt(2)$ večja in je tista hitrost, ki omogoči vesoljski ladji, da se iztrga zemeljski težnosti.

Keplerjevi zakoni

Odkritje gravitacijskega zakona so omogočili Keplerjevi zakoni, ki jih je odkril Johannes Kepler v začetku 17. stoletja. Gravitacijski zakon sledi neposredno iz tretjega Keplerjevega zakona, ki pravi, da je kvocient kuba razdalje planeta od Sonca in kvadrata obhodnega časa okoli Sonca enak za vse planete. Omenjena lastnost izhaja iz zapisa Newtonovega zakona za planet, ki potuje okrog Sonca: izenačimo gravitacijski privlak s produktom mase planeta (m) in radialnega pospeška

$$\kappa mM/r^2 = 4\pi^2 mr/T^2 \ .$$

V tem zapisu je M masa Sonca, r razdalja planeta od Sonca, T pa dolžina leta določenega planeta. Če enačbo delimo z $m\pi^2$ in pomnožimo z r^2, dobimo zapis tretjega Keplerjevega zakona

$$\kappa M/\pi^2 = r^3/T^2 \ .$$

Natančna formulacija tretjega Keplerjevega zakona je nekoliko drugačna, kot smo napisali zgoraj. Planeti ne krožijo okrog Sonca, ampak potujejo po elipsah, ki so dokaj podobne krogom. To je vsebina prvega Keplerjevega zakona. Količina r v zgornjih dveh enačbah se torej nanaša na neko povprečno razdaljo med planetom in Soncem. Navedimo še drugi Keplerjev zakon: Radij vektor od Sonca do planeta opiše v enakih časih enake površine. V tem zakonu je zajet izrek o ohranitvi vrtilne količine, ki jo bomo spoznali v enem od naslednjih poglavij.

Inercijalni sistemi, Galileijeve transformacije, sistemske sile

Mirujoči in enakomerno se gibajoči opazovalni sistemi so enakovredni, saj ima Newtonov zakon v vseh takšnih sistemih enako obliko. V mirujočih sistemih izmerimo telesom enake pospeške, kot v enakomerno se gibajočih sistemih. Hitrosti in lege teles pa povezujejo transformacije, ki so dobile ime po Galileju Galileiju:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v_0}$$

in

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v_0}t.$$

V teh dveh izrazih je $\mathbf{v_0}$ hitrost gibanja koordinatnega sistema, ki ga označujemo s črtico, v sistemu brez črtice.
Če se koordinatni sistem s črtico giblje pospešeno, pravimo, da je takšen sistem neinercialen in opazovalec mora v takšnem sistemu upoštevati sistemske sile. Če se peljemo z dvigalom, ki pospešuje pri vožnji navzgor s pošpeškom a, se čutimo težje, kot pri enakomerni vožnji ali pri mirovanju. V mirujočem opazovalnem sistemu zapišemo za telo v dvigalu pri pospeševanju navzgor

$$F_p - F_g = ma \; . \qquad (M30a)$$

V tem zapisu je F_p sila, s katero deluje podlaga na telo v smeri navzgor, F_g pa je sila teže, ki deluje navzdol. Sila podlage mora biti za člen ma večja od sile teže, da se bo telo pospeševalo. Če postavimo dvigalo nekam v breztežen prostor v vesolje, daleč od nebesnih teles, bo sila teže enaka nič in bo celotna sila podlage povzročala pospešek. Opazovalec v dvigalu bo lahko izmeril silo podlage, pospeška pa ne bo mogel izmeriti. V opazovalnem sistemu, ki je vpet na dvigalo, je pospešek telesa, ki je v stiku s talno ploščo dvigala, enak nič. Zapis drugega Newtonovega zakona za opazovano telo pa je

$$F_p + F_s = 0 \; . \qquad (M30b)$$

Tukaj je F_s sila neznanega izvora, ki uravnoveša silo podlage. V dvigalu zaprt opazovalec ne more vedeti, ali je F_s posledica pospeševanja dvigala, ali posledica privlaka neznanega nebesnega telesa, na katerega površini dvigalo miruje. V slednjem primeru je F_s gravitacijska sila, v prvem primeru - torej v primeru pospeševanja dvigala v breztežnem prostoru pa rečemo, da je F_s sistemska sila, katere vrednost je

$$F_s = -ma \; , \qquad (M30c)$$

kot ugotovimo s primerjanjem enačb (M30a) in (M30b).
Primer sistemske sile je tudi centrifugalna sila, ki pri kroženju vleče krožeče telo proč od središča. Njena vrednost je

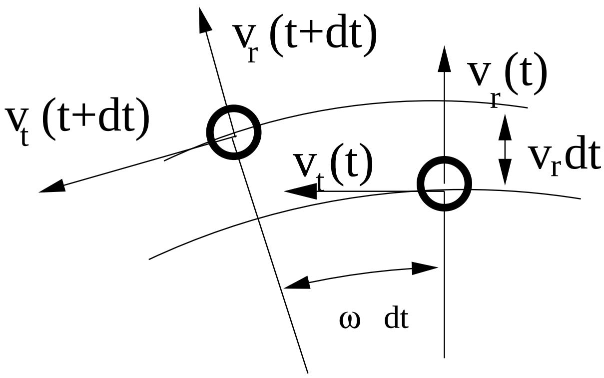
$$F_c = m\omega^2 r$$

ali

$$F_c = mv^2/r \; . \qquad (M30d)$$

Na površini Zemlje se ne zavedamo, da krožimo okrog zemeljske osi in je povsod, razen na severnem in južnem polu sila teže zmanjšana za centrifugalno silo, govorimo pa, da se zemeljski težni pospešek spreminja z geografsko širino. Navidezna odvisnost spreminjanja zemeljskega težnega pospeška od zemljepisne širine je težko napovedati, ker gre del spremembe na račun sploščenosti Zemlje in se tudi količina r_{12} v enačbi (M29) spreminja z zemeljsko zemljepisno širino.

Coriolisova sila
Če se giblje telo z enakomerno hitrostjo vzdolž radija v koordinatnem sistemu, ki se vrti s kotno hitrostjo ω, se mu smer hitrosti spreminja. Na sliki sta podani lega in hitrost telesa v času t in $t + dt$. Narisani sta tudi tangencialna in radialna komponenta hitrosti v obeh trenutkih. Izračunajmo celotno spremembo hitrosti $d\mathbf{v}$ v tangencialni smeri. Prispevek radialne komponenta hitrosti izračunamo tako, da narišemo obe hitrosti iz skupnega



Slika 9: K izpeljavi Coriolisove sile

izhodišča. Kot med njima je $d\varphi = \omega dt$, sprememba hitrosti pa je enaka $v_r\omega dt$. Tudi tangencialna hitrost prispeva enak delež. Kot je razvidno s slike, se na račun povečanja radija za $v_r dt$ poveča tangencialna hotrost za $\omega(r + dr) - \omega r = v_r\omega dt$. Sprememba smeri tangencialne hitrosti v času dt pa nima prispevka v tangencialni smeri. Skupna sprememba hitrosti je torej $2v_r\omega dt$. Coriolisov pospešek dobimo tako, da spremembo hitrosti delimo z dt

$$a_c = 2v_r\omega \ . \qquad ((M31)$$

Coriolisopva sila je enaka zmnožku mase in Coriolisovega pospeška $F_c = 2mv_r\omega$.

Gibalna količina

Če enačbo (M24), ki predstavlja drugi Newtonov zakon, pomnožimo z dt in integriramo, dobimo enačbo

$$\int \mathbf{F} dt = m\Delta\mathbf{v} \ . \qquad (M32)$$

S črko Δ označujemo spremembe količin - v tem primeru spremembo hitrosti, ki jo povzroči sunek sile. Količino $\int \mathbf{F} dt$ imenujemo sunek sile, količino $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ pa gibalno količino. Enačba (M32) torej pravi, da je sunek sile enak spremembi gibalne količine. Ta izrek je posebej uporaben pri obravnavi večjega števila teles, ko povzročajo sunke sil le medsebojne sile, ki jih sicer ne poznamo, vendar nas to ne moti, saj vstopajo pri računaju gibalne količine sistema več teles v izraz za sunek sile le zunanje sile. Pri obravnavanju trka dveh neprožnih teles, ki čelno trčita, in sprijeti nadaljujeta pot, se bo njuna skupna gibalna količina ohranila, če ni zunanjih sil:

$$v_1 m_1 + v_2 m_2 = (m_1 + m_2)V \qquad (M33)$$

torej bo hitrost po trku enaka

$$V = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2) \ . \qquad (M34)$$

Vrtilna količina

Telo z maso m, ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$, ima gibalno količino

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v} \ .$$

Če to telo kroži, njegova gibalna količina venomer spreminja smer, zato je smiselno definirati vrtilno količino

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{G} \;, \tag{M35}$$

ki ima pri enakomernem kroženju stalno vrednost. Z znakom $\times$ smo označili vektorski produkt med vektorjema $\mathbf{r}$ in $\mathbf{G}$. Smer vektorja, ki smo ga dobili z vektorskim množenjem, se ujema s smerjo normale (pravokotnice) na ravnino, v kateri ležita vektorja $\mathbf{r}$ in $\mathbf{G}$. Usmerjenost vektorja Γ pa sovpada s smerjo pomika desnega vijaka, ki ga zavijamo v smeri kroženja telesa. Za točkasto telo je velikost vrtilne količine enaka

$$mvr = mr^2\omega = J\omega \;. \tag{M36}$$

S tem smo definirali vztrajnostni moment točkastega telesa, ki kroži na razdalji r okrog neke osi

$$J = mr^2 \;. \tag{M37}$$

Vidimo, da je vztrajnostni moment odvisen od mase in od oddaljenosti telesa od osi. Če je teles več, dobimo vztrajnostni moment s seštevanjem, za razsežno telo pa z integriranjem (seštevanjem) po vseh delih telesa:

$$J = \int r^2 dm \;. \tag{M38}$$

Za homogen poln valj s polmerom R in višino h, izračunamo vztrajnostni moment takole:

$$J = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \pi R^4 \rho h/2 = mR^2/2 \;. \tag{M39}$$

Za votel valj, pri katerem je vsa masa zbrana na obodu, je račun enostavnejši in velja $J = mR^2$. Za kroglo dobimo rezultat

$$J = 2mR^2/5 \;. \tag{M40}$$

Vztrajnostni moment telesa je najlaže izračunati glede na njegovo simetrijsko os. Telesa pa lahko vrtimo tudi okrog poljubne osi, ki ne gre skozi njihovo središče. Če je os vrtenja premaknjena glede na simetrijsko os telesa za vektor $\mathbf{R}'$, bo vztrajnostni moment glede na takšno os enak

$$J = \int (\mathbf{r} + \mathbf{R}')^2 dm = J^* + 2R' \int \mathbf{r} dm + mR'^2 \;. \tag{M41}$$

Integral $\int \mathbf{r}dm$ je enak nič, saj so prispevki k integralu lahko pozitivni ali negativni, ker pa gre simetrijska os telesa skozi težišče, je ravno toliko prispevkov pozitivnih, kot negativnih in se med sabo uničijo. Torej je iskani vztrajnostni moment enak

$$J = J^* + mR^{*2} \;. \tag{M42}$$

To enakost poznamo pod imenon **Steinerjev izrek**. Pri ravni tanki enakomerno debeli palici z debelino $2r$ je vztrajnostni moment okrog njene vzdolžne osi, ki gre skozi sredino palice, enak $mr^2/2$, vztrajnostni moment okrog katere koli druge osi, ki gre skozi težišče palice in je na prej omenjeno os pravokotna, pa je $ml^2/12$, pri čemer je l dolžina palice. Slednji rezultat dobimo, če predpostavimo, da je r dosti manjši od l in računamo, kot da je vsa masa razporejena vzdolž osi palice. Če vrtimo palico okrog osi, ki je pravokotna na palico in gre skozi enega od koncev palice, lahko za določitev vztrajnostnega momenta uporabimo Steinerjev izrek in dobimo

$$J = ml^2/12 + ml^2/4 = ml^2/3\ . \qquad (M43)$$

Newtonov zakon za vrtenje okrog nepremične osi
Enačbo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ki predstavlja Newtonov zakon za točkasto telo, ki kroži po krogu z radijem r, pomnožimo z leve strani z vektorjem $\mathbf{r}$, ki sega od osi vrtenja do točkastega telesa. Na levi strani dobimo produkt $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, ki ga imenujemo navor (enota za navor je Nm), njegova velikost pa je $rFsin\alpha$, če oklepata $\mathbf{r}$ in $\mathbf{F}$ kot α. Izraz $m\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ lahko pišemo kot produkt vztrajnostnega momenta in kotnega pospeška

$$mr^2a/r = J\alpha\ . \qquad (M44)$$

Torej se zapiše Newtonov zakon za vrtenje telesa okrog nepremične osi v obliki

$$\mathbf{M} = J\alpha\ . \qquad (M45)$$

Zapis velja tudi za razsežno togo telo, ki se vrti okrog nepremične osi.

Izrek o ohranitvi vrtilne količine
Če enačbo (M45) pomnožimo z dt in seštejemo prispevke v času od t_1 do t_2, dobimo

$$\int \mathbf{M}dt = \Delta\mathbf{\Gamma}\ . \qquad (M46)$$

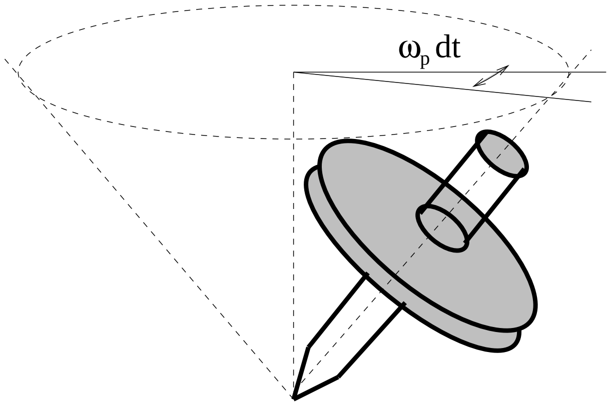
Izraz na levi strani enačbe imenujemo sunek navora, na desni strani pa smo dobili spremembo vrtilne količine, saj velja

$$J\int \alpha dt = J\Delta\omega = \Delta\mathbf{\Gamma}$$

Z besedami povedano: Sunek navora je enak spremembi vrtilne količine.

Precesija je pojav, ki nazorno ilustrira vpliv navora na spreminjanje vrtilne količine. Zavrtimo vrtavko s kotno hitrostjo ω, tako da bo njena vrtilna količina enaka $\Gamma = J\omega$, kjer je J vztrajnostni moment vrtavke. Če postavimo vrtavko na trdno podlago tako, da bo njena os navpična, se bo vrtavka vrtela okrog navpične osi, dokler bo kotna hitrost dovolj velika, nato pa bo začela vrtavka opletati in končno se bo zvrnila. Če postavimo vrtavko na podlago tako, da bo njena os poševna (sl. 10), pa vrtavka ne bo padla, ampak bo njena os opisovala plašč na glavo postavljenega stožca. Označimo s T_p čas, v katerem bo napravila os en obhod. Pripadajočo precesijsko kotno hitrost, ki opisuje gibanje osi vrtavke po plašču stožca, označimo z $\omega_p = 2\pi/T_p$. Teža vrtavke, ki skuša vrtavko prevrniti, povzroči v času dt sunek navora $mgr^*dt\ sin\varphi$, če je φ kot, ki pove, koliko je vrtavka nagnjena, r^* pa je razdalja od spodnjega dela osi vrtavke do njenega težišča. Omenjeni sunek navora povzroči spremembo vodoravne komponente vrtilne količine, tako da lahko zapišemo $mgr^*dt\ sin\varphi = \Gamma\omega_p dt\ sin\varphi$.
Enačbo delimo z $dtsin\varphi$ in izrazimo precesijsko kotno hitrost:

$$\omega_p = mgr^*/\Gamma\ . \qquad (M47)$$



Slika 10: Precesija vrtavke

Vrtenje prosto se gibajočih teles

Obravnavanje gibanja telesa, ki ni vpeto na nepremično os, presega cilje, ki smo si jih zastavili v tem delu. Navrzimo le intuitivno utemeljitev enačb, ki so uporabne v takšnem primeru. Izrek o gibanju težišča nam pove, da je pospešek težišča sistema točkastih teles, ali togega telesa, odvisen le od rezultante sil - torej je odvisen le od velikosti in smeri posameznih sil, ne pa od porazdelitve premic, vzdolž katerih sile prijemajo. Ravno porazdelitev premic, vzdolž katerih prijemajo sile, ki pospešujejo sistem točkastih teles ali togo telo, pa določa celokupni navor, ki povzroča, da se sistemu spreminja vrtilna količina. Postavi se vprašanje, glede na katero os naj računamo navor in vztrajnostni moment, da bomo potem izvrednotili kotne pospeške, spreminjanje kotnih hitrosti in končno kote zavrtitve. Izkaže se, da obstojajo odlikovane osi. To so tri glavne osi togega telesa, ki so med sabo druga na drugo pravokotne in se sekajo v težišču telesa. Pri krogli igra vlogo odlikovane trojice osi lahko katera koli trojica med sabo pravokotnih osi, ki se sekajo v središču krogle. Pri valju sovpada ena od glavnih osi s simetrijsko osjo valja, drugi dve pa sta zopet poljubni - zadoščati morata le pogoju, da sta med sabo pravokotni, da se sekata v težišču in da sta pravokotni na simetrijsko os. Podobna pravila veljajo tudi za ostala simetrična telesa. Za telesa brez simetrij je določitev glavnih osi dokaj zapletena računska ali eksperimentalna naloga. Glede na glavne osi zapišemo enačbo $M = J\alpha$, ki nam določa pospešek glede na težiščno os.

Izrek o kinetični energiji, delo in moč

Enačbo (M24), ki predstavlja Newtonov zakon za točkasto telo, skalarno pomnožimo s pomikom telesa $d\mathbf{r}$ in integriramo. (Skalarni produkt dveh vektorjev je količina, katere številčna vrednost je enaka zmnožku velikosti obeh vektorjev in kosinusa vmesnega kota.) Na levi strani imamo
$\int \mathbf{F}d\mathbf{r}$, kar poimenujemo delo sile. Na desni strani imamo integral izraza

$$\int m\mathbf{a}d\mathbf{r} = md\mathbf{v}d\mathbf{r}/dt = m\mathbf{v}d\mathbf{v}\ . \qquad (M48)$$

Integral tega izraza je $mv^2/2$ vzet v mejah med končno in začetno vrednostjo hitrosti. Izraz $mv^2/2$ poimenujemo kinetična energija. Dobljena enačba

$$A = \Delta E_{kin}$$

predstavlja izrek o kinetični energiji, ki pravi, da se kinetična energija točkastega telesa spremeni za toliko, kolikor je sila **F** na tem telesu opravila dela. Enota za delo in za energijo je kgm^2s^{-2}, kar imenujemo *joule* (J). Velja dogovor, da naj sila **F** ne vsebuje teže telesa, ampak da predstavimo delo teže kot spremembo potencialne energije

$$\Delta E_{pot} = mg\Delta z \qquad (M49)$$

in tako ima s potencialno energijo razširjen energijski izrek obliko

$$A = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} \ . \qquad (M50)$$

Če je telo razsežno, moramo pri vrednotenju potencialne energije sešteti prispevke po vsem telesu in račun pokaže, da je vrednost potencialne energije enaka

$$E_{pot} = mgz^* \ , \qquad (M51)$$

kjer je z^* navpična koordinata težišča telesa. Če se razsežno in togo telo giblje, velja izraz za kinetično energijo v obliki

$$E_{kin} = mv^{*2}/2 \ , \qquad (M52)$$

kjer je v^* hitrost težišča, samo v primeru, da je gibanje translatorno, kar pomeni, da pri gibanju koordinatni sistem, ki je vpet na telo, ves čas ohranja smeri vseh treh koordinatnih osi. Če temu ni tako, in je gibanje hkrati translatorno in rotacijsko, moramo izraz za kinetično energijo razširiti s členom, ki predstavlja rotacijsko kinetično energijo in ima obliko

$$E_{kin}^{rot} = J^*\omega^2/2 \ . \qquad (M53)$$

Do tega izraza pridemo s seštevanjem prispevkov $v_{rot}^2 dm/2$ po prostornini telesa, če postavimo za rotacijski del hitrosti

$$\mathbf{v}_{rot} = \omega \times \mathbf{r} \ . \qquad (M54)$$

Tudi izraz

$$E_{kin} = mv^{*2}/2 + J^*\omega^2/2 \qquad (M55)$$

še ni splošen in velja samo v primeru, da se telo vrti okrog katere od svojih tako imenovanih simetrijskih osi, ki vedno sovpadajo s simetrijskimi osmi telesa, če jih le-to ima. Obravnava splošnega primera presega raven znanja, ki je cilj tega zapisa, saj posega v področje tenzorske algebre.

Poglejmo si še primer **elastičnega trka dveh togih kroglic**. Pri takšnem trku se ohranita skupna kinetična energija in skupna gibalna količina. Torej lahko v splošnem primeru napišemo štiri enačbe: tri za ohranitev treh komponent gibalne količine in enačbo, ki predstavlja ohranitev kinetične energije. Število neznank, ki določajo stanje po trku, je šest: po tri komponente hitrosti za vsako od dveh teles. Torej potrebujemo še dve enačbi, da bo število enačb enako številu neznank. Ti dve enačbi sta skriti v opisu začetnih leg ($\mathbf{r_1}$ in $\mathbf{r_2}$), začetnih hitrosti ($\mathbf{v_1}$ in $\mathbf{v_2}$) in velikosti obeh krogel (R_1 in R_2).

Poglejmo si najenostavnejši primer, ko v mirujočo kroglo čelno trči s hitrostjo **V** druga, povsem enaka krogla. Iščemo hitrosti $\mathbf{v_1}$ in $\mathbf{v_2}$ prve in druge krogle po trku. Ohranitev gibalne količine zapišemo v obliki

$$mV = mv_1 + mv_2 \ , \qquad (*)$$

ohranitev kinetične energije pa v obliki

$$mV^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2/2 \; . \qquad (**)$$

Če prvo od teh dveh enačb kvadriramo, drugo pomnožimo z 2 in nato dobljeni enačbi odštejemo eno od druge, dobimo $2v_1v_2 = 0$. Ta enačba je lahko izpolnjena samo, če je eden od faktorjev (v_1 ali v_2) enak nič. v_2 ne more biti enak nič, ker bi potem naši izhodiščni enačbi (*) in (**) zahtevali, da je v_1 enak V in bi to pomenilo, da je šla prva krogla nemoteno skozi drugo kroglo. Torej je rešitev $v_1 = 0$ in $v_2 = V$, kar pomeni, da se je po trku prva krogla ustavila in predala gibalno količino in energijo drugi krogli, ki začne potovati naprej z isto hitrostjo, kot je prej potovala prva krogla.

Nihala

Najenostavnejši primer nihala je nihalo na vijačno vzmet, ki niha v vodoravni smeri, na primer v smeri osi x. Če je nihalo odmaknjeno od ravnovesne lege za razdaljo x, deluje vzmet na utež z maso m s silo $F = -kx$ in Newtonov zakon se zapiše v obliki $-kx = ma$. Če upoštevamo zvezo (M18b) za pospešek nihala, dobimo enačbo

$$-kx = -\omega^2 x \; ,$$

kar nam da vrednost za krožno frekvenco

$$\omega = \sqrt{k/m} \; , \qquad (M56)$$

oziroma za nihajni čas nihala

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \; .$$

Nihalo ima kinetično ($E_{kin} = mv^2/2$) in prožnostno energijo. Slednjo izračunamo kot delo prožnostne sile vzmeti

$$E_{proz} = kx^2/2 \; . \qquad (M57)$$

Račun celotne energije pokaže, da se le-ta s časom ne spreminja

$$E_{cel} = m\omega^2 x_0^2/2 \; . \qquad (M58)$$

Takšen rezultat dobimo, ko zapišemo kinetično energijo v obliki

$$mv^2/2 = (1/2)\omega^2 x_0^2 cos^2(\omega t + \delta)$$

in prožnostno energijo v obliki $(1/2)kx_0^2 sin^2(\omega t + \delta)$ in upoštevamo, da velja

$$k = m\omega^2 \; .$$

Pri matematičnem nihalu, ki ga predstavlja kroglica obešena na lahki vrvici dolžine l, dobimo krožno frekvenco iz Newtonovega zakona na osnovi enačbe

$$-mgsin\varphi = -m\omega^2 l\varphi \; . \qquad (M59)$$

Na levi strani enačbe je zapisana dinamična komponenta sile teže vzdolž tangente krožnega loka, po katerem se giblje kroglica. Na desni strani pa je napisan pospešek v obliki negativne vrednosti produkta med kvadratom krožne frekvence in odmikom, ki je del krožnega loka - torej produkt radija l in kota φ. Pri majhnih odmikih, ko lahko zapišemo

$$sin\varphi \approx \varphi \ , \qquad (M60)$$

lahko enačbo delimo s φ in dobimo

$$\omega^2 = g/l \ , \qquad (M61)$$

oziroma

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \ . \qquad (M62)$$

Če matematično nihalo ni dušeno, se tudi njegova energija ohranja pri vrednosti

$$E_{cel} = mgl\varphi_0^2/2 \ , \qquad (M63)$$

kjer je kot φ_0 amplituda nihanja. Sestavni komponenti celotne energije sta kinetična energija in potencialna energija.

Na podoben način, kot smo določili nihajni čas za nihalo na vijačno vzmet in za matematično nihalo, lahko obravnavamo tudi druge vrste nihal. Fizično nihalo imenujemo poljubno togo telo, ki je obešeno na vodoravni osi nad težiščem telesa. Nihajni čas fizičnega nihala je

$$T = 2\pi\sqrt{J/mgr^*} \ . \qquad (M64)$$

V tem izrazu je J vztrajnostni moment telesa glede na obesišče, m je masa telesa, r^* pa razdalja med obesiščem in težiščem telesa, ki niha. Nihalo na polžasto vzmet, ali sučno nihalo, je sestavljeno iz togega telesa, ki je vrtljivo okrog navpične osi. Če je os vodoravna, mora prebadati težišče. Vztrajnostni moment telesa glede na dano os naj bo J. Polžasta vzmet, katere navor je premo sorazmeren zasuku

$$M = -D\varphi \qquad (M65)$$

zagotavlja nihalu ravnovesno lego pri $\varphi = 0$. Nihajni čas takšnega nihala je

$$T = 2\pi\sqrt{J/D} \ . \qquad (M66)$$

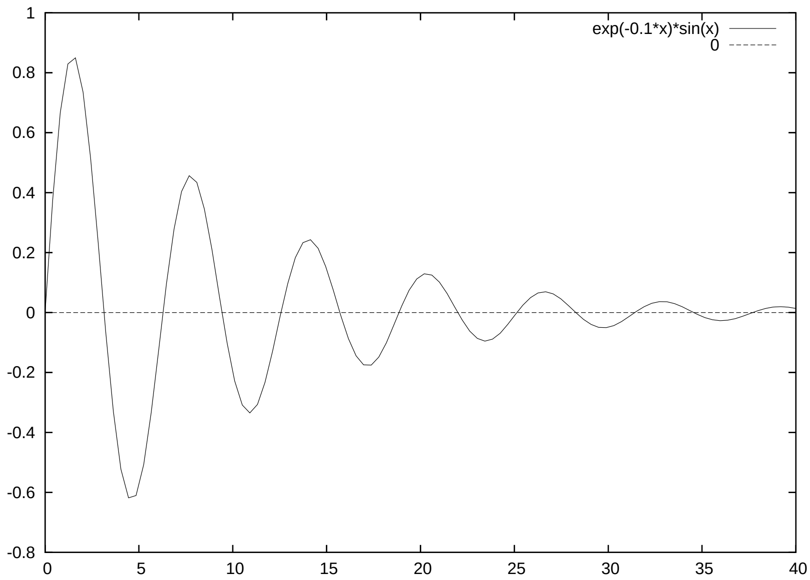
Dušeno nihanje

Nihalo, ki ga poženemo v nihanje, izgublja energijo in se čez čas ustavi. V takem primeru rečemo, da je nihanje dušeno (sl. 11). Matematična obravnava dušenega nihanja je enostavna, če je sila, ki zavira nihanje, sorazmerna hitrosti nihala $F = -k\ v$, kjer je k konstanta sorazmernosti med silo in hitrostjo. V tem primeru lahko zapišemo $dE = -Fdx$. Ta zapis pomeni, da je izguba energije nihala enaka delu, ki ga nihalo opravi napram okolici. Pomik nihala v času dt lahko zapišemo $dx = v\ dt$ in pridemo do zapisa

$$dE = -k\ v^2 dt \ .$$

Ker je kvadrat hitrosti sorazmeren kinetični energiji, ki jo ima nihalo, lahko zapišemo

$$dE = -2\beta E dt \ . \qquad (M67)$$



Slika 11: Dušeno nihanje

Konstanto β imenujemo koeficient dušenja. S preureditvijo zgornje enačbe, integriranjem po času in antilogaritmiranjem dobimo $E = E_0 exp(-2\beta t)$ in ker je pri nihanju energija nihala sorazmerna kvadratu odmika, lahko zapišemo odmik kot

$$x = x_0 exp(-\beta t) sin(\omega t) \ . \qquad (M68)$$

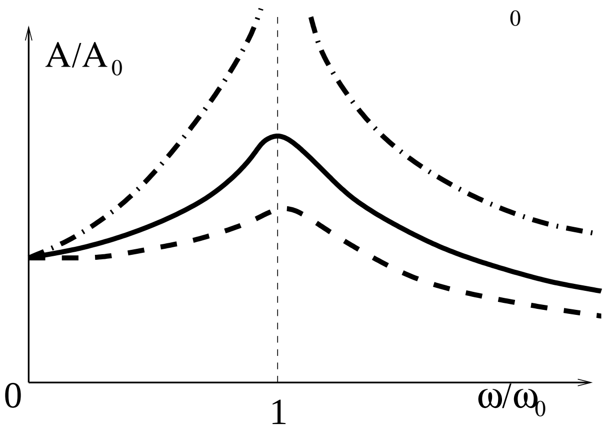
Bolj natančen račun pokaže, da ω ni enaka lastni, ampak nekoliko zmanjšani krožni frekvenci. Zmanjšanje je odvisno od koeficienta dušenja.

Vsiljeno nihanje

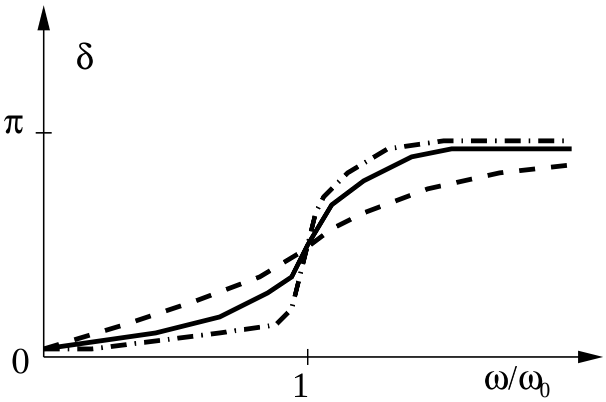
Če hočemo, da nihalo niha s stalno amplitudo in s frekvenco, ki smo si jo poljubno izbrali - in je torej lahko različna od lastne frekvence, mu moramo nihanje vsiljevati. Če zgornji konec vrvice, na kateri visi kroglica, pomikamo v smeri vodoravne osi x tako, da velja

$$x_v = A sin(\omega t) \ , \qquad (M69)$$

rečemo, da matematičnemu nihalu vsiljujemo nihanje s krožno frekvenco vsiljevanja ω in z amplitudo vsiljevanja A. Če je frekvenca vsiljevanja zelo, zelo majhna, bo kroglica na spodnji strani vrvice sledila roki in amplituda nihanja nihala bo enaka amplitudi vsiljevanja. Pri zelo visokih frekvencah vsiljevanja bo kroglica mirovala, saj se bo premikala le vrvica: zgoraj toliko kot roka, spodaj pa nič. Pri vsiljevanju z lastno frekvenco nihala pa bo nihalo začelo močno nihati tudi pri zelo majhni amplitudi vsiljevanja. Krivulji, ki kaže odvisnost amplitude nihanja od frekvence vsiljevanja, rečemo resonančna krivulja (sl. 12) in prikazuje razmerje amplitud x_0/A v odvisnosti od ω. Osnovna značilnost resonančne krivulje je ta, da je njena vrednost pri zelo majhnih frekvencah vzbujanja enaka ena, pri zelo visokih frekvencah vzbujanja je enaka nič, v bližini lastne frekvence nihala - v območju resonance - pa ima resonančna krivulja vrh. Obstoja cela družina resonančnih krivulj. Oblike krivulj so odvisne od vrednodsti parametra dušenja. Če je nihalo nedušeno, teži višina vrha proti neskončni vrednosti, pri vse večjem dušenju pa postajajo vrhovi vse nižji.



Slika 12: Resonančne krivulje



Slika 13: Odvisnost faznega premika od frekvence vzbujajna treh nihal z različnim koeficientom dušenja

Pri vsiljenem nihanju je zanimivo opazovati, za kolikšen fazni kot zaostaja nihanje nihala za vzbujanjem. Pri zelo nizkih frekvencah vzbujanja ni nobenega zaostanka, v območju resonance je zaostanek za četrt nihaja ($\delta = \pi/2$), pri zelo visokih frekvencah vzbujanja pa sta vzbujanje in odziv nihala v nasprotni fazi ($\delta = \pi$)(sl. 13).

Sestavljeno nihanje

Poglejmo si dva primera sestavljenega gibanja: Vzemimo dve nihali na vijačno vzmet, ki nihata z nekoliko različnima frekvencama $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ in $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$. Uteži povežemo z lahko raztegljivo vrvico, na sredi katere pritrdimo značko. Nihali poženemo v nihanje, obe z enako amplitudo x_0 in spremljamo gibanje značke na vrvici. Odmik značke ($x_z(t)$ je povprečna vrednost odmikov obeh nihal:

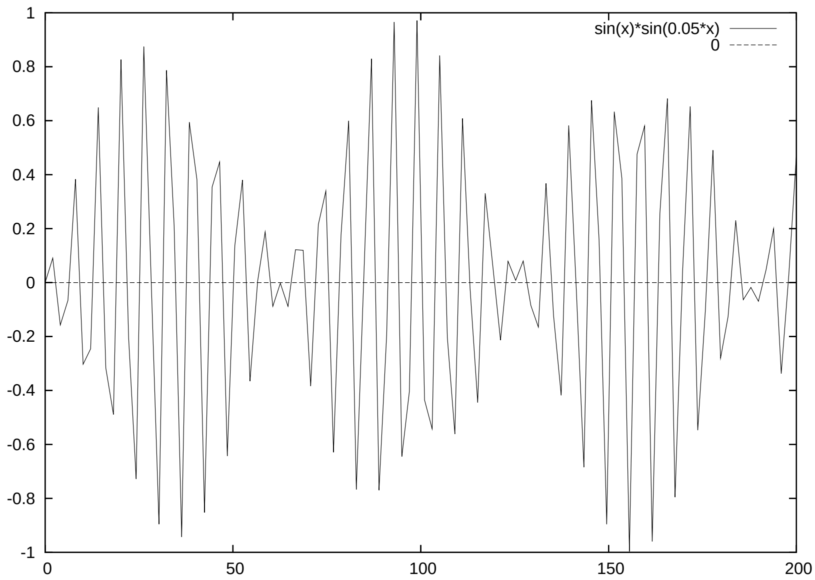
$$x_z(t) = x_0(cos((\omega_0 + \Delta\omega)t) + cos((\omega_0 - \Delta\omega)t))/2 \; . \qquad (M70)$$

Uporabimo trigonometrijsko formulo

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos((\alpha + \beta)/2)cos((\alpha - \beta)/2)$$

ter dobimo

$$x_z(t) = x_0 cos(\omega_0 t) cos(\Delta\omega t) \; . \qquad (M71)$$



Slika 14: Utripanje

Prvi faktor predstavlja zapis za sinusno nihanje, drugi faktor, ki se spreminja zelo počasi, če velja $\Delta\omega << \omega_0$, pa predstavlja oscilirajočo ovojnico (envelopo) tega nihanja, kar pomeni, da se amplituda tega nihanja spreminja s krožno frekvenco $\Delta\omega$. Pravimo, da značka utripa (sl. 14).
Drugi primer: Sestavimo dve nihanji, od katerih poganja prvo nihanje kroglico vzdolž osi x takole $x = x_0 sin(\omega_x t)$, drugo nihanje pa povzroča odmik kroglice v smeri y, ki je pravokotna na smer x : $y = y_0 sin(\omega_y t + \delta)$. Takšno sestavljeno nihanje lahko predstavimo v ravnini x, y s krivuljami (*Lissajouseve krivulje*) zelo raznolikih oblik, odvisne so namreč od razmerij obeh krožnih frekvenc, od razmerja amlitud in od faznega kota δ (sl. 15).

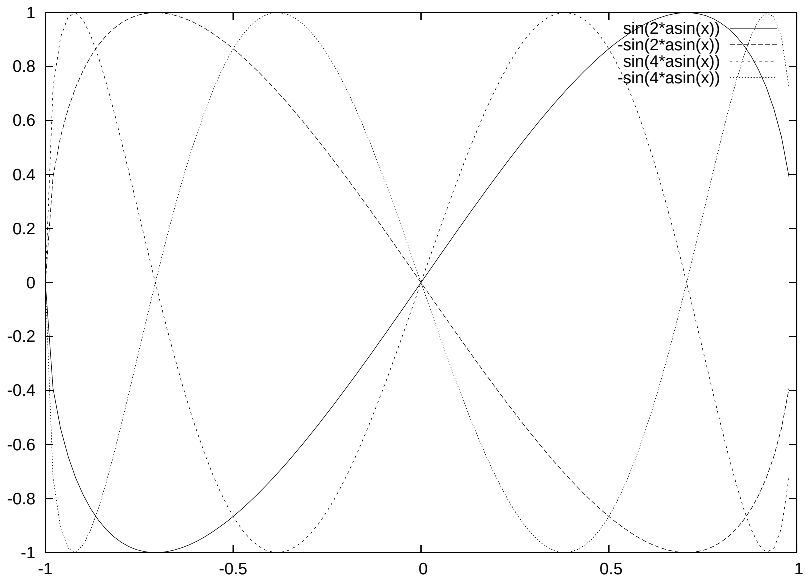
Elastomehanika, Hookov zakon

Kadar govorimo o togih telesih, se moramo zavedati, da je togost le približek in da kaže vsako telo v naravi določeno mero gibkosti. Telesom, ki pod vplivom obremenitve spremenijo svojo obliko (sl. 16) in se pri popuščanju obremenitve vrnejo v prvotno obliko, pravimo, da so elastična. Kvantitativni opis elastičnosti zajamemo z enačbo

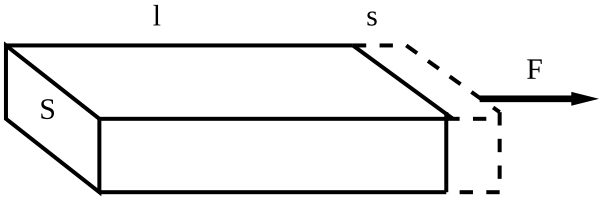
$$F/S = Es/l \,, \qquad (M72)$$

ki velja za valjasto ali prizmatično telo dolžine l in preseka S, ki ga raztegnemo ali stisnemo s silo F, pri tem pa se telo podaljša ali skrajša za dolžino s. Količino s/l imenujemo relativni raztezek, ozirom skrček, E pa je elastični modul telesa. Snov okarakteriziramo z vrednostjo modula elastičnosti in tudi z mejno vrednostjo obremenitve F/S, ki lahko povzroči porušitev telesa, še prej pa je dosežena meja plastičnosti. Del deformacije telesa, ki ga deformiramo nad mejo plastičnosti, ostane, saj se telo ne vrne več v prvotno stanje, ko obremenitev popusti. Enačba (M72) je zapis za Hookov zakon.

Kadar obremenimo telo v obliki kvadra tako, da delujemo z dvojico sil vzdolž dveh nasprotnih ploskev, govorimo o strižni obremenitvi. Odgovor elastičnega telesa na strižno



Slika 15: Lissajousove krivulje



Slika 16: Hookov zakon

obremenitev je strižna deformacija (sl. 17), ki se kaže tako, da preide presek telesa iz pravokotne oblike v obliko paralelograma z notranjimi koti, ki za kot α odstopajo od pravega kota. Kot α je sorazmeren obremenitvi in Hookov zakon za strižno obremenitev zapišemo v obliki

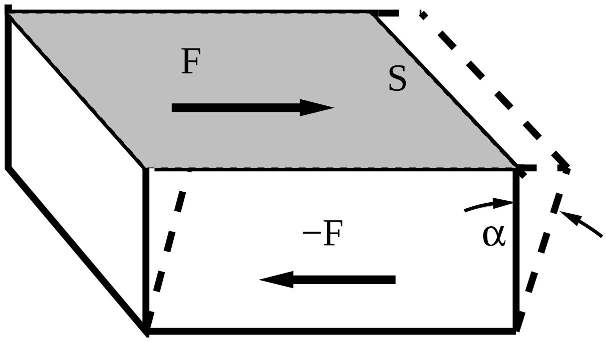
$$F/S = G\alpha \ . \qquad (M73)$$

Hookov zakon velja za trdne snovi, tekočine pa lahko podvržemo le tlačnim obremenitvam. Stisljivost tekočine definiramo z enačbo

$$dV/V = -\chi dp \ , \qquad (M74)$$

kjer je dV/V relativno zmanjšanje volumna tekočine, ki je podvržena povišanemu tlaku dp. Koeficient stisljivosti χ je velik pri lahko stisljivih tekočinah (plinih) in majhen pri kapljevinah.

Mehanika tekočin in plinov
Hidrostatika
Snovi, ki jih lahko pretakamo, so plini in tekočine. Če torej razširimo pomen besede *tekočina* tudi na snovi v plinskem stanju, poimenujemo tekoče snovi, ki lahko tvorijo kaplje, *kapljevine*.
V tekočini, ki se nahaja v težnostnem polju, tlak z globino narašča. V globini h pod



Slika 17: Strižna napetost in strižna deformacija

gladino tekočine pritiska stolpec tekočine s presekom S s silo teže $F_g = \rho S h g$ na ploskev S, kar pomeni, da je v globini h prirastek tlaka

$$\Delta p = \rho g h \ . \qquad (M75)$$

Povečan tlak v globini povzroča silo vzgona, ki deluje na telesa, ki plavajo na površini tekočine, lebdijo pod površino ali se nahajajo na dnu posode, ki je napolnjena s tekočino. Za telo v obliki pokončne prizme, ki je okrog in okrog obdano s tekočino, velja, da je sila, ki deluje na spodnjo ploskev, v smeri navzgor, enaka $\rho g h_2 S$, sila na zgornjo ploskev je $\rho g h_1 S$ in deluje v smeri navzdol. Razlika je torej

$$\rho_{tek} g (h_2 - h_1) S = m_{tek} g \ ,$$

kjer sta h_1 in h_2 globini, na katerih se nahajata zgornja in spodnja ploskev telesa, o katerem govorimo. Prišli smo do **Arhimedovega zakona**, ki določa silo vzgona,

$$F_{vzg} = \rho_{tek} V g \qquad (M76)$$

in pravi, da je sila vzgona enaka teži izpodrinjene tekočine. Plavajoča telesa (ladje, čolni) izrinejo toliko vode, kot je njihova masa. Plovila morajo biti tudi stabilna, kar pomeni, da se morajo sama vračati v pokončno lego, če se nagnejo. Stabilnost je zagotovljena le, če je točka, ki ji pravimo metacenter, nad težiščem plovila. Metacenter se nahaja tam, kjer seka sila vzgona simetralo pri nagnjeni legi plovila (sl. 18).

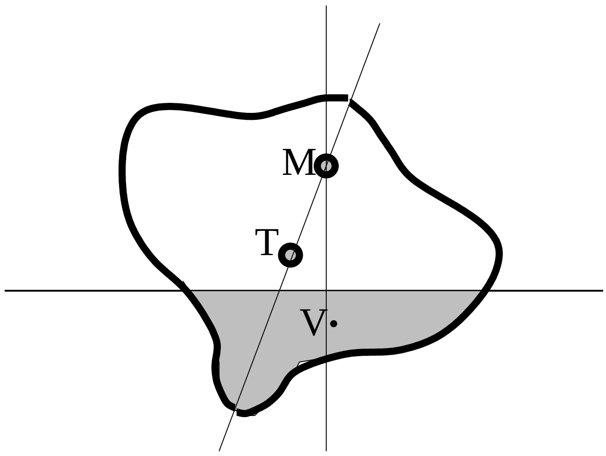
Površinska napetost

Površina tekočine se obnaša kot elastična opna, ki je vedno enako napeta in sicer je sila na enoto dolžine navideznega reza enaka

$$F = \gamma l \ . \qquad (M77)$$

Posledica sile površinske napetosti je povečan tlak v kapljicah in mehurčkih. Če si mislimo kapljico prerezano vzdolž ekvatorja na dve polovici, ju vleče površinska napetost skupaj, povečan tlak v notranjosti kapljice pa ju tišči narazen. Obseg kapljice vzdolž ekvatorja je $2\pi r$, torej je sila, ki vleče polovici skupaj, $2\pi r \gamma$. To silo uravnoveša sila $\pi r^2 \Delta p$. Ko velikosti teh dveh sil izenačimo, dobimo za nadtlak v kapljici izraz

$$\Delta p = 2\gamma / r \ . \qquad (M78)$$



Slika 18: Metacenter (M) in težišče (T)ladje

Za mehurček, ki ima dvojno površino, notranjo in zunanjo, je nadtlak dvakrat večji

$$\Delta p = 4\gamma/r \ .$$

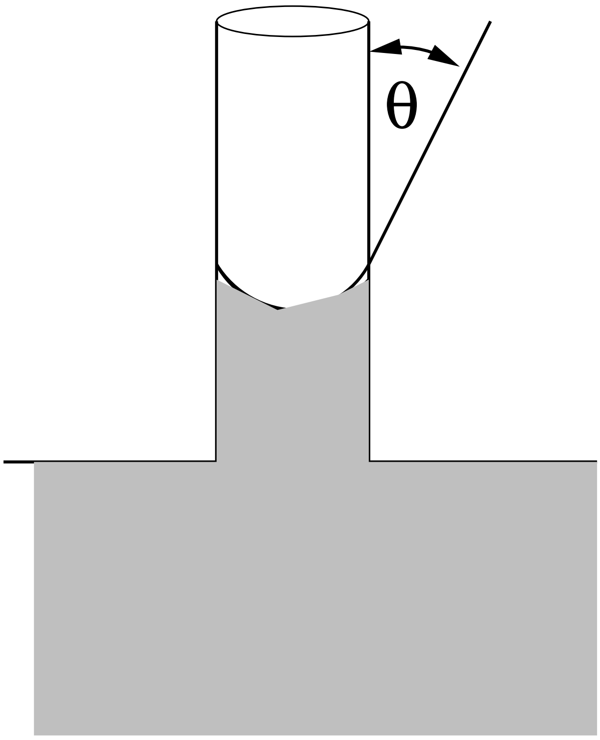
Površinska napetost povzroča tudi dvig tekočine v kapilarah. Pojav je odvisen od mejnega kota, ki ga tvori površina kapljevine glede na ploskev, ki ločuje tekočino od sosednje snovi, ki tvori steno kapilare (sl. 19). Če kapljevina moči notranjost cevke, deluje sila površinske napetosti v smeri osi kapilare (vzemimo, da je le-ta navpična). V tem primeru rečemo, da je mejni kot nič. Sila, ki vleče kapljevino navzgor, je $2\pi r\gamma$, nasprotna sila pa je teža stolpca kapljevine $\pi r^2 \rho h g$. Višina stolpca se ustali pri $h = 2\gamma/(\rho g r)$. Če kapljevina ne omoči stene kapilare, deluje sila površinske napetosti v smeri navzdol in v kapilari imamo namesto dviga znižanje gladine. Možni so tudi vsi vmesni primeri. Če ima mejni kot θ poljubno vrednost med 0 in π, bo kapilarni dvig ali spust enak

$$h = 2\gamma cos\theta/(\rho g r) \ . \qquad (M79)$$

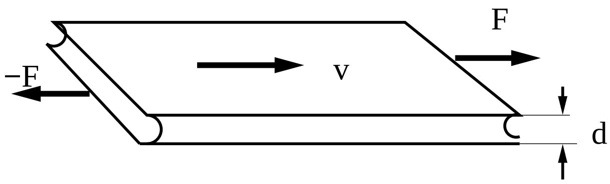
Dinamika tekočin
Viskoznost
Viskoznost je lastnost tekočine, da izkazuje pri gibanju notranje trenje. Če se nahaja tekočina med dvema vzporednima ploščama s površino S, ki sta druga od druge oddaljeni za d, in ena miruje, druga pa se giblje s hitrostjo v, je tekočina podvržena dinamičnemu strigu (sl. 20). Meritve pokažejo, da se na račun strižnih deformacij prenaša z ene plošče na drugo sila

$$F/S = \eta v/d \ . \qquad (M80)$$

Ta izraz za silo lahko uporabimo za napoved hitrosti pretakanja tekočine skozi cevi. Tekočino v cevi si lahko mislimo razdeljeno na vzdolžne koncentrične plasti, ki ob steni mirujejo, na sredini pa se gibljejo najhitreje. Pretok je obratno sorazmeren viskoznosti tekočine in lahko meritev pretokov služi za določitev viskoznosti tekočin. Enačba (M80) je uporabna tudi za napoved sile upora, ki deluje na telo, ki se giblje skozi tekočino. Natančen račun je težaven, približen rezultat za silo upora, ki deluje na kroglo pa dobimo,



Slika 19: Dvig tekočine v kapilari



Slika 20: Strižna obremenitev in strižna hitrost v viskozni tekočini

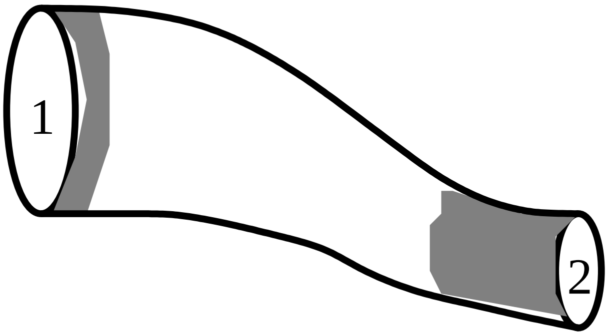
če postavimo v enačbi (M80) za S površino krogle, za d pa radij krogle. S tem dobimo $F = 4\pi r\eta v$, pravilen rezultat pa je

$$F = 6\pi r\eta v \; . \qquad (M81)$$

Tej zvezi pravimo linearni zakon upora.

Bernoullijeva enačba
Za neviskozne tekočine, ki se pretakajo vzdolž stacionarnih tokovnic, se vprašamo, kako sta odvisna drug od drugega tlak in hitrost tekočine. Uporabimo energijski izrek in napišemo, da je vzdolž določenega šopa tokovnic razlika med delom tlaka na vstopni in izstopni strani enaka vsoti razlik vstopne in izstopne kinetiče in potencialne energije (sl. 21). Delo, ki ga opravi okoliška tekočina v kratkem casovnem intervalu, ki ustreza diferencialu volumskega pretoka ΔV, je tlak pomnožen z ΔV. Predpostavimo, da je tekočina nestisljiva in je volumen vstopajoče tekočine enak volumnu iztekajoče tekočine. Kinetično energijo izrazimo s pomočjo izraza $\rho v^2 \Delta V/2$, potencialno pa kot $\rho g h \Delta V$. Energijski izrek napišemo takole:

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \rho v_2^2 \Delta V/2 - \rho v_1^2 \Delta V/2 + \rho g h_2 \Delta V - \rho g h_1 \Delta V \; .$$



Slika 21: K izpeljavi Bernoullijeve enačbe

Ko enačbo delimo z ΔV in ločimo člene tako, da premestimo tiste z indeksom 1 na levo stran, tiste z indeksom 2 pa na desno, dobimo Bernoullijevo enačbo

$$p_1 + \rho v_1^2/2 + \rho g h_1 = p_2 + \rho v_2^2/2 + \rho g h_2 \ . \qquad (M82)$$

Vidimo, da se v tekočini, ki se pretaka brez izgub, vzdolž tokovnic ohranja vsota tlaka, gostote kinetične energije in gostote potencialne energije. Bernoullijeva enačba velja le približno, saj se vzdolž tokovnic energija pretvarja zaradi notranjega trenja tekočine v toplotno energijo - le-ta pa se izgublja v okolici. Bolj pravilen bi bil zapis v obliki neenačbe, ki bi nakazovala, da se vsota tlaka in energije manjša vdolž tokovnice.

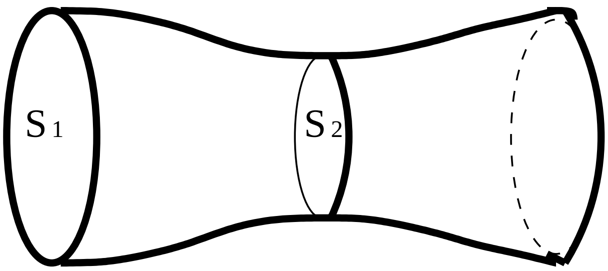
Pri iztekanju tekočine iz posode, ki ima odprtino h pod gladino tekočine, nam Bernoullijeva enačba napove, da bo tekočina iztekala s hitrostjo $v = \sqrt{2gh}$. Do tega rezultata smo prišli tako, da smo vzeli za točko 1 razmere na gladini tekočine, kjer je hitrost tekočine zanemarljiva, tlak je enak zunanjemu tlaku, točko 2 pa v curku, ki brizga iz posode, kjer je tekočina zopet pod zunanjim tlakom.

Bernoullijeva enačba pojasni delovanje Venturijeve cevi (sl. 22), ki ima med dvema širokima presekoma kratek zožen del. V zoženem delu se mora tekočina, ki ni stisljiva, pospešiti na hitrost, ki je večja za razmerje velikega in manjšega preseka. Zaradi povečane gostote kinetične energije se mora pri nespremenjeni potencialni energiji zmanjšati tlak, kar se izkorišča pri vodnih vakuumskih črpalkah.

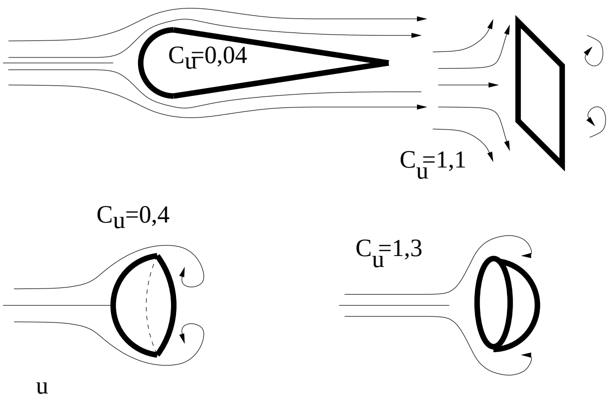
Bernoullijeva enačba nam omogoča izvrednotiti **zastojni tlak**, ki se pojavlja na mestu, kjer udarja curek tekočine ob mirujočo oviro. Če brizga curek vode s hitrostjo v v pravokotno postavljeno ravno ploščo in se ob njej razblini, potem vsaj za središčno tokovnico velja, da je hitrost ob plošči enaka nič. Če torej zapišemo Bernoullijevo enačbo za to točko in za točko v curku, kjer se hitrost še ni zmanjšala, dobimo $p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2$. Člena s potencialno energijo smo izpustili, ker sta na obeh straneh enaka. Razliko tlakov $p_2 - p_1$ imenujemo **zastojni tlak** p_z, ki je enak

$$p_z = \rho v^2/2 \ . \qquad (M83)$$

Zastojni tlak se pojavlja na čelni ploskvi gibajočega se avtomobila, pod razpetim padalom, na steni, kjer udarja obnjo curek gasilske brizgalne, itd. Zastojni tlak povzroča silo upora



Slika 22: Venturijeva cev



Slika 23: Koeficienti upora za različno oblikovana telesa

gibajočih se teles. Če ima telo površino S, zapišemo silo upora takole:

$$F = C_u \rho S v^2/2 \; . \qquad (M84)$$

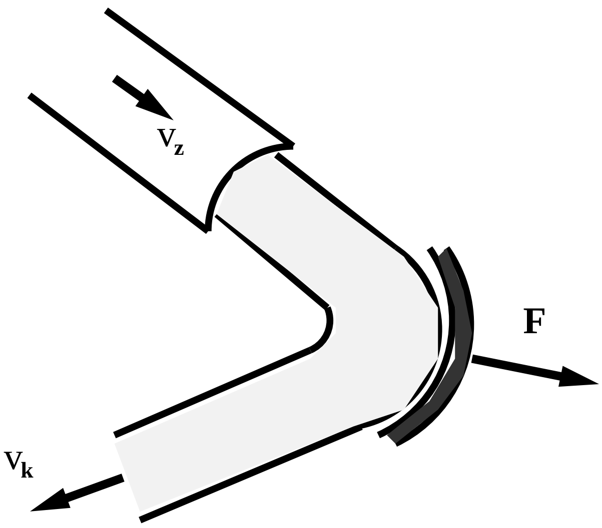
Konstanto C_u imenujemo koeficient upora. Njene vrednosti so lahko večje od 1 ($C_u = 1.3$ za polkroglasto padalo na primer), lahko pa mnogo manjše od 1 ($C_u = 0,04$ za telesa z idealno aerodinamično obliko) (sl. 23). Izraz (M84) predstavlja **kvadratni zakon upora**, ker je sila upora odvisna od kvadrata hitrosti. Razmejitev med veljavnostjo linearnega in kvadratnega zakona upora opravimo na osnovi vrednosti Reynoldsevega števila, ki je definirano kot kvocient sile upora, ki sledi iz kvadratnega zakona in sile upora, ki sledi iz linearnega zakona za kroglasto telo. Kvocient je enak $\pi C_u r^2 \rho v^2/12\pi r\eta v = C_u r^2 \rho v/12\pi\eta$. Nekoliko spremenjeno vrednost tega kvocienta definiramo kot Reynoldsovo število

$$R_e = 2R\rho v/\eta \; . \qquad (M85)$$

Če je vrednost Reynoldsevega števila več kot 1000, velja kvadratni zakon upora, če je manj kot 0,5 velja linearni zakon upora, pri vmesnih vrednostih, pa se gibanje tekočine ne pokorava niti enemu niti drugemu zakonu.

Sila curka

Primer, ki smo ga uporabili za izpeljavo zastojnega tlaka, lahko obravnavamo tudi s pomočjo izreka o gibalni količini. Obravnavajmo curek tekočine z gostoto ρ, hitrostjo $\mathbf{v_z}$ in presekom S, ki zadeva ob oviro, tako, da se curek odkloni in nadaljuje pot s hitrostjo $\mathbf{v_k}$. V času dt sprejme ovira gibalno količino $\mathbf{\Phi_m}(\mathbf{v_z} - \mathbf{v_k})dt$, pri čemer smo z $\mathbf{\Phi_m}$ označili masni pretok $\mathbf{\Phi_m} = \mathbf{\Phi_v}\rho = \rho\mathbf{v_z}S$. Sprememba smeri curka je seveda povezana s spremembo



Slika 24: Sila curka

gibalne količine (sl. 24), za to pa je potreben sunek sile

$$\mathbf{F}dt = \mathbf{\Phi_m}(\mathbf{v_k} - \mathbf{v_z})dt \; .$$

Enačbo delimo z dt in dobimo za silo curka izraz

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi_m}(\mathbf{v_k} - \mathbf{v_z}) \; . \qquad (M86)$$

Iz te enačbe lahko izrazimo tlak, ki ga ustvarja curek. Vzemimo, da pade curek pravokotno na oviro v obliki ravne ploskve in se ob njej razblini. V tem primeru velja $\mathbf{v_k} \approx 0$ in dobimo izraz za tlak pod curkom
$p = \rho v_z^2$.
To lahko primerjamo z izrazom za zastojni tlak
$p_z = C_u \rho v_z^2/2$.
Vrednost koeficienta upora C_u za ravno ploščo je manj kot 2, zato napove enačba, ki izhaja iz Bernoullijeve enačbe, manjši zastojni tlak, kot enačba, ki jo izpeljemo iz izreka o gibalni količini.